



## Chapitre

# Variable cycliques, formule de Beltrami et théorème de Noether

## 3.1 Variables cycliques

### 3.1.1 Définition

Soit un système avec  $N$  coordonnées généralisées  $q_1, \dots, q_N$ , et supposons que le lagrangien  $L(\dot{q}_\alpha, q_\alpha, t)$  ne dépend pas de  $q_c$ .

L'équation d'Euler-Lagrange pour  $q_c$  s'écrit alors :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_c} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_c} = 0.$$

Comme  $L$  ne dépend pas de  $q_c$ , on a :

$$\frac{\partial L}{\partial q_c} = 0.$$

Donc :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_c} \right) = 0,$$

et par conséquent :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_c} = \text{cste.}$$

### 3.1.2 Exemples

#### Exemple 1

Exemple :  $x_1, x_2, x_3$  sont les coordonnées cartésiennes et  $V(\vec{r})$  est indépendant de  $x_1$ .

On a alors :

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - V(\vec{r}).$$

Comme  $L$  ne dépend pas de  $x_1$ , la coordonnée  $x_1$  est cyclique. Donc :

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) = 0.$$

Ainsi :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m\dot{x}_1 = p_1 \text{ cste},$$

### ! Potentiel

Quand un potentiel ne dépend d'une coordonnée, la composante de l'impulsion dans cette même direction est conservée.

## Exemple 2

### π Théorème 1.1 : Énergie cinétique en sphérique

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)$$

En coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$ , si le potentiel  $V(\vec{r})$  est indépendant de  $\varphi$ , alors

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2) - V(\vec{r}).$$

Comme  $L$  ne dépend pas de  $\varphi$ , cette coordonnée est cyclique. On a donc

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \text{cste} \quad \Rightarrow \quad mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi} = \text{cste}.$$

### ! Potentiel invariant autour d'un axe

Quand un potentiel est invariant autour d'un axe, la composante du moment cinétique selon cet axe est conservée

#### ✓ Exemple

Si il est indépendant explicitement du temps, bien sur les variables d'une trajectoire dépendent toujours du temps.

## 3.1.3 Formule de Beltrami

Si  $L$  est indépendant de  $t$  ✓

$$\text{Si } \frac{\partial L}{\partial t} = 0, \text{ alors } \frac{d}{dt} \left( \sum_{\alpha=1}^N \dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - L \right) = 0.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \sum_{\alpha} \dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - L \right) &= \sum_{\alpha} \ddot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} + \sum_{\alpha} \dot{q}_\alpha \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{dL}{dt} \\ &= \sum_{\alpha} \dot{q}_\alpha \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \right] - \frac{\partial L}{\partial t}. \end{aligned}$$

Avec les équations d'Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0,$$

on obtient donc

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{\alpha=1}^N \dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - L \right) = 0$$



### Théorème 1.2 : Formule de Beltrami

Si  $L$  ne dépend pas du temps,

$$\sum_{\alpha=1}^N \dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - L = \text{cste}$$

Cette constante vaut l'énergie mécanique. En effet, Pour une particule de masse  $m$  soumise à un potentiel  $V(\vec{r})$ ,

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r}).$$

Alors, d'après la formule de Beltrami,

$$\sum_i \dot{r}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} - L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + V(\vec{r}) = \text{cste} = E_m.$$

## 3.1.4 Retour sur la corde

Si une corde de masse linéique  $\mu$  est décrite par  $y = f(x)$ , alors

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2} dx.$$

Comme  $h = y(x)$  et  $dm = \mu dl$ , l'énergie potentielle vaut

$$V = \int g h dm = \mu g \int_{x_i}^{x_f} y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

On doit minimiser la fonction, en prenant en compte la contrainte :

$$S = \int_0^D \mu g y \sqrt{1 + y'^2} + \lambda \left( \sqrt{1 + y'^2} - \frac{l}{D} \right) dx$$

où  $L$  est le Lagrangien.

Avec  $\delta S = 0$ , on a :

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow y' - \frac{\partial L}{\partial y'} = \text{Cste}$$

Ainsi :

$$(\mu g y + \lambda) y'^2 - (\mu g y + \lambda) \sqrt{1 + y'^2} = \text{Cste}$$

Soit :

$$\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} (\mu g y + \lambda) = \text{Cste}$$

En posant  $\lambda = \mu g (y_0 + S)$ , on obtient :

$$f = \frac{y_0 + S}{c} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y'} \sqrt{1 + y'^2} = 0$$

Puis :

$$z = \frac{y + S}{c}$$

$z^2 = 1 + c^2 z'^2$  dont la solution est  $z = ch(x/c + c')$

La solution générale est  $y(x) = c(ch((x - d/2)/c) - ch(D/2c)) + H$

## 3.2 Théorème de Noether

### 3.2.1 Énoncé

On fait une transformation de coordonnées généralisées :  $q_\alpha \rightarrow f_\alpha(q_\alpha)$  peut être rendues infiniment petits

On peut écrire  $q_\alpha \rightarrow q_\alpha + \epsilon_\alpha$  qui est très petit.

Soient  $L$  qui transforme  $L \rightarrow L + \frac{d\delta F - q_\alpha \delta t}{dt}$

On peut supposer que

$$\delta L \rightarrow \frac{d}{dt} \delta F$$



## Théorème 2.1

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \epsilon_{\alpha} - \delta F = Cst$$

## Le Concept de Symétrie Continue

On considère une transformation infinitésimale des coordonnées généralisées  $q_{\alpha}$  :

$$q_{\alpha} \rightarrow q'_{\alpha} = q_{\alpha} + \epsilon_{\alpha}$$

Ici,  $\epsilon_{\alpha}$  représente une très petite variation. <sup>i</sup>

Une transformation est une symétrie si elle laisse les équations du mouvement invariante. <sup>?</sup>

$$L(q', \dot{q}', t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} \delta F$$

Cette forme garantit que l'action  $S = \int L dt$  ne change qu'aux bornes, ce qui ne modifie pas le chemin extrémal (les équations d'Euler-Lagrange restent les mêmes).

### i Info

qui peut dépendre du temps, des positions ou des vitesses.

### 💡 Astuce

Cela signifie que le Lagrangien ne change pas, ou change seulement par l'ajout d'une \*\*dérivée totale par rapport au temps\*\* d'une fonction  $\delta F$  :

## Développement de la Variation $\delta L$

On calcule la variation du Lagrangien induite par le changement  $q_{\alpha} \rightarrow q_{\alpha} + \epsilon_{\alpha}$ . Par un développement de Taylor au premier ordre :

$$\delta L = \sum_{\alpha} \left( \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} \delta q_{\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \delta \dot{q}_{\alpha} \right)$$

Puisque  $\delta q_{\alpha} = \epsilon_{\alpha}$  et  $\delta \dot{q}_{\alpha} = \dot{\epsilon}_{\alpha}$ , on a :

$$\delta L = \sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} \epsilon_{\alpha} + \sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \dot{\epsilon}_{\alpha}$$

## Manipulation par Intégration par Parties

L'objectif est de faire apparaître les équations du mouvement. On utilise la règle de dérivation d'un produit :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \epsilon_{\alpha} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \right) \epsilon_{\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \dot{\epsilon}_{\alpha}$$

En isolant le terme en  $\dot{\epsilon}_{\alpha}$  et en réinjectant dans l'expression de  $\delta L$ , on obtient :

$$\delta L = \sum_{\alpha} \left[ \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \right) \right] \epsilon_{\alpha} + \sum_{\alpha} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \epsilon_{\alpha} \right)$$

## Application des Équations d'Euler-Lagrange

Pour un système physique réel, les coordonnées suivent les équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} = 0$$

En appliquant ce théorème, le premier terme entre crochets dans l'expression de  $\delta L$  s'annule identiquement. Il ne reste que la dérivée totale :

$$\delta L = \frac{d}{dt} \left( \sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \epsilon_{\alpha} \right)$$

## Identification de la Constante de Mouvement

Nous avons deux expressions pour  $\delta L$  :

1. Par l'hypothèse de symétrie :  $\delta L = \frac{d}{dt} \delta F$
2. Par le calcul cinématique :  $\delta L = \frac{d}{dt} (\sum_{\alpha} p_{\alpha} \epsilon_{\alpha})$  (où  $p_{\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}}$  est le moment conjugué).

En égalant les deux :

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \epsilon_{\alpha} \right) = \frac{d}{dt} \delta F \implies \frac{d}{dt} \left( \sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \epsilon_{\alpha} - \delta F \right) = 0$$



### Grandeur Conservée

La quantité entre parenthèses est donc une constante du mouvement (intégrale première) :

$$\mathcal{J} = \sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \epsilon_{\alpha} - \delta F = \text{Cste}$$

## 3.2.2 Exemple 1

On considère une particule de masse  $m$  en chute libre dans un champ de pesanteur uniforme  $g$  dirigé selon  $-\vec{z}$ . Le Lagrangien s'écrit :

$$L = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

### Symétrie par translation spatiale ( $x$ )

On applique une translation infinitésimale selon l'axe  $x$  :  $x \rightarrow x + \epsilon$ . On observe les variations suivantes :

- Variation des coordonnées :  $\epsilon_x = \epsilon, \epsilon_y = 0, \epsilon_z = 0$ .
- Variation des vitesses :  $\dot{x} \rightarrow \frac{d}{dt}(x + \epsilon) = \dot{x}$ , donc  $\delta \dot{x} = 0$ .
- Variation du Lagrangien : Comme  $L$  ne dépend pas de  $x$ ,  $\delta L = 0$ .

Ici,  $\delta F = 0$  car le Lagrangien est strictement invariant. La constante de mouvement issue du théorème de Noether est :

$$\mathcal{J}_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \epsilon_x - \delta F = (m\dot{x})\epsilon - 0 = \text{Cste}$$

Puisque  $\epsilon$  est un paramètre arbitraire, on en déduit que la composante du moment linéaire est conservée :

$$p_x = m\dot{x} = \text{Cste}$$

## Symétrie par translation spatiale ( $z$ )

On applique maintenant  $z \rightarrow z + \epsilon$ . Ici, le Lagrangien n'est pas invariant car le potentiel dépend de  $z$  :

$$L \rightarrow \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - mg(z + \epsilon) = L - mg\epsilon$$



### Transformation de la fonction $F$

Pour que le théorème de Noether s'applique, il faut exprimer la variation  $\delta L = -mg\epsilon$  comme une dérivée totale par rapport au temps. On pose :

$$-mg\epsilon = \frac{d}{dt}(-mgt\epsilon) \implies \delta F = -mgt\epsilon$$

La grandeur conservée associée à la translation selon  $z$  est :

$$\mathcal{J}_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \epsilon_z - \delta F = (m\dot{z})\epsilon - (-mgt\epsilon) = \text{Cste}$$

En factorisant par  $\epsilon$  :

$$m\dot{z} + mgt = C \implies m(\dot{z} + gt) = C$$



### Résultat Physique

En divisant par  $m$ , on retrouve bien la loi de la chute libre :

$$\dot{z} = -gt + \frac{C}{m}$$

Cela montre que même si le Lagrangien n'est pas invariant ( $\delta L \neq 0$ ), la structure de "dérivée totale" permet de trouver l'intégrale première du mouvement.



### Interprétation

La conservation de  $p_x$  découle du fait que l'espace est homogène selon  $x$  (pas de force). La "conservation" de  $m\dot{z} + mgt$  est simplement une réécriture de la deuxième loi de Newton appliquée à un système soumis à une force constante.

## 3.2.3 Exemple : Système invariant par rotation autour d'un axe

On considère une rotation infinitésimale d'un angle  $\epsilon$  autour d'un axe de direction  $\vec{n}$  (où  $\|\vec{n}\| = 1$ ). La variation de la position d'une particule s'écrit :

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \delta\vec{r} \quad \text{avec} \quad \delta\vec{r} = \epsilon(\vec{n} \wedge \vec{r})$$

En composantes, cela peut s'écrire via le produit matriciel avec la matrice antisymétrique  $P$  que vous avez définie :  $\delta\vec{r} = \epsilon P\vec{r}$ .

### Invariance du Lagrangien

Pour un système invariant par rotation (par exemple, une particule dans un potentiel central  $V(r)$ ), le Lagrangien ne change pas lors de cette transformation. Puisque  $\delta L = 0$ , nous sommes dans le cas où :

$$\delta F = 0$$

### Calcul de la grandeur conservée

D'après le théorème de Noether, la constante du mouvement  $\mathcal{J}$  est donnée par le produit scalaire des moments conjugués et de la variation des coordonnées :

$$\mathcal{J} = \sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \delta q_{\alpha} - \delta F$$

En notation vectorielle, avec  $\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = m\dot{\vec{r}}$ , on a :

$$\mathcal{J} = \vec{p} \cdot (\epsilon \vec{n} \wedge \vec{r})$$



### Manipulation des produits mixtes

On utilise la propriété d'invariance circulaire du produit mixte :  $\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{A})$ .

$$\mathcal{J} = \epsilon \vec{n} \cdot (\vec{r} \wedge \vec{p})$$

## Identification du moment cinétique

On reconnaît dans l'expression précédente le vecteur moment cinétique  $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$ .

$$\mathcal{J} = \epsilon(\vec{n} \cdot \vec{L}) = \text{Cste}$$

Puisque le paramètre de rotation  $\epsilon$  est arbitraire, c'est la projection du moment cinétique sur l'axe de symétrie qui est conservée :

$$\boxed{\vec{n} \cdot \vec{L} = \text{Cst}}$$