Chapitre 5

Méthode de Hamilton-Jacobi et Séparation des Variables

Rédigé par PAULHENRY SAUX
Université Paul Sabatier · L2 PS

5.1 La théorie de Hamilton-Jacobi

La méthode de Hamilton-Jacobi est une formulation de la mécanique analytique qui cherche à trouver une transformation canonique $(q_i, p_i) \to (Q_i, P_i)$ telle que les nouvelles coordonnées Q_i et les nouveaux moments P_i soient tous des constantes du mouvement.

Le choix le plus simple consiste à imposer un nouveau Hamiltonien identiquement nul : $\tilde{H} = 0$. Les équations de Hamilton associées deviennent alors :

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_i} = 0 \quad \text{et} \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_i} = 0 \implies Q_i = \text{cste}, \quad P_i = \alpha_i = \text{cste} \tag{5.1}$$

Pour y parvenir, on utilise une fonction génératrice du second type, notée $S(q_i, P_j, t)$, qui dépend des anciennes positions q_i et des nouveaux moments constants $P_j \equiv \alpha_j$.

Définition 1.1 : Équation de Hamilton-Jacobi

La fonction génératrice $S(q_i, \alpha_j, t)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre suivante :

$$H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{5.2}$$

avec les relations de transformation :

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \quad \text{et} \quad Q_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} \tag{5.3}$$

5.2 Exemple : L'oscillateur harmonique unidimensionnel

Le Hamiltonien d'un oscillateur harmonique est donné par : $H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$.

L'équation de Hamilton-Jacobi pour ce système s'écrit :

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{5.4}$$

5.2.1 Résolution par séparation des variables

On pose l'Ansatz [i] : $S(q,\alpha,t) = S_2(q) + S_1(t)$, où α est le nouveau moment constant ($P = \alpha$). L'équation devient :

> **i Info**
> La forme de notre tentative de solution

$$\underbrace{\frac{1}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}S_2}{\mathrm{d}q}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2}_{\text{dépend de } q} = \underbrace{-\frac{\mathrm{d}S_1}{\mathrm{d}t}}_{\text{dépend de } t} = \alpha \quad \text{(constante de séparation)} \tag{5.5}$$

En intégrant chaque partie :

1. $S_1(t) = -\alpha t$
2. $\left(\frac{\mathrm{d}S_2}{\mathrm{d}q}\right)^2 = 2m\alpha - m^2\omega^2 q^2 \implies S_2(q) = \int_0^q \sqrt{2m\alpha - m^2\omega^2\tilde{q}^2}\,\mathrm{d}\tilde{q}$

L'action principale complète est donc :

$$S(q,\alpha,t) = \int_0^q \sqrt{2m\alpha - m^2\omega^2\tilde{q}^2}\,\mathrm{d}\tilde{q} - \alpha t \tag{5.6}$$

5.2.2 Retour aux variables physiques

En utilisant la relation $Q = \frac{\partial S}{\partial \alpha}$:

$$Q = \int_0^q \frac{m}{\sqrt{2m\alpha - m^2\omega^2\tilde{q}^2}}\,\mathrm{d}\tilde{q} - t = \frac{1}{\omega}\arcsin\left(q\sqrt{\frac{m\omega^2}{2\alpha}}\right) - t \tag{5.7}$$

En inversant cette relation pour isoler la position $q(t)$, et en posant $P \equiv \alpha$, on trouve la solution temporelle classique :

$$q(t) = \sqrt{\frac{2P}{m\omega^2}}\sin\left(\omega(t+Q)\right) \tag{5.8}$$

Le moment conjugué s'obtient via $p = \frac{\partial S}{\partial q} = \sqrt{2mP - m^2\omega^2 q^2}$, ce qui donne :

$$p(t) = \sqrt{2mP}\cos\left(\omega(t+Q)\right) \tag{5.9}$$

5.3 Cas où H est indépendant du temps

Lorsque le Hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps, on peut séparer la dépendance temporelle de manière générale.

Définition 3.1 : Action réduite

Si $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, l'énergie totale E est conservée. On pose $P_1 = E = \alpha_1$ et on cherche l'action sous la forme :

$$S(q_i, \alpha_j, t) = W(q_i, \alpha_j) - \alpha_1 t \tag{5.10}$$

W est appelée l'**action réduite** (ou fonction caractéristique de Hamilton).

L'équation de Hamilton-Jacobi se réduit alors à une équation indépendante du temps :

$$H\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) = \alpha_1 \tag{5.11}$$

Les équations de la transformation deviennent :

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad Q_1 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} - t, \quad Q_i = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} \quad (\text{pour } i \geq 2) \tag{5.12}$$

Évolution du nouveau système

Sous cette forme, le nouveau Hamiltonien vaut $\tilde{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t} = \alpha_1 - \alpha_1 = 0$. Cependant, si l'on choisit d'utiliser W directement comme fonction génératrice d'une transformation indépendante du temps, le nouveau Hamiltonien vaut $\tilde{H} = H = \alpha_1 = P_1$. Les équations du mouvement sont alors $\dot{Q}_1 = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_1} = 1 \implies Q_1 = t + \beta_1$, et toutes les autres coordonnées sont purement constantes.

5.4 Méthode de séparation des variables

L'équation de Hamilton-Jacobi ne présente un réel intérêt pratique que si elle peut être résolue par séparation de variables, c'est-à-dire si W (ou S) peut s'écrire comme une somme de fonctions ne dépendant chacune que d'une seule coordonnée.

5.4.1 Condition de séparabilité d'une variable

Une coordonnée q_1 est dite séparable si l'équation de Hamilton-Jacobi peut se mettre sous une forme où q_1 et $\frac{\partial S}{\partial q_1}$ n'apparaissent que regroupés dans une fonction isolée ϕ :

$$H\left(\phi\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}\right), q_2, \ldots, q_N, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_N}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{5.13}$$

On peut alors poser la constante de séparation α_1 telle que :

$$\phi\left(q_1, \frac{\mathrm{d}S_1}{\mathrm{d}q_1}\right) = \alpha_1 \tag{5.14}$$

Ce qui permet d'intégrer directement $S_1(q_1)$ et de réduire le problème à $N-1$ degrés de liberté.

5.4.2 Système totalement séparable

Proposition 4.1 : Séparabilité totale

Un système est dit totalement séparable s'il existe un système de coordonnées (dit de Jacobi) dans lequel l'action se sépare entièrement sous la forme :

$$S(q_i, \alpha_i, t) = S_1(t) + \sum_{i=1}^{N} W_i(q_i, \alpha_1, \ldots, \alpha_N) \tag{5.15}$$

Le Hamiltonien global se décompose alors en une somme de Hamiltoniens effectifs pour chaque coordonnée :

$$H(q_i, p_i) = \sum_{i=1}^{N} H_i\left(q_i, \frac{\mathrm{d}W_i}{\mathrm{d}q_i}\right) \tag{5.16}$$

Utilité pratique

La séparabilité totale réduit la résolution d'une équation aux dérivées partielles complexe à N dimensions en un ensemble de N intégrations (quadratures) indépendantes à une dimension.