1

Chapitre

Mécanique Hamiltonienne - Méthode

1.1 Calcul Variationnel

Consiste à chercher une fonction $y(x)$ rendant stationnaire une fonctionnelle $T[y] = \int_{x_A}^{x_B} F(y', y, x)\, dx$.

Méthode : Modélisation d'une fonctionnelle

Pour exprimer une grandeur physique (ex : temps de parcours) sous forme d'intégrale :

1. Exprimer l'élément de longueur infinitésimal : $\mathrm{d}s = \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$.
2. Utiliser les lois de conservation (ex : $E_m = T + V =$ cste) pour exprimer la vitesse $v = \frac{ds}{dt}$ en fonction des variables d'espace.
3. En déduire l'élément de temps $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}s}{v}$ à intégrer.

Définition 1.1

L'équation d'Euler-Lagrange associée à la fonctionnelle $F(y', y, x)$ est :

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

Rédigé par PAULHENRY SAUX
Université Paul Sabatier · L2 PS

Identité de Beltrami (Cas où $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$)

Si F ne dépend pas explicitement de x, l'équation admet une intégrale première immédiate qui réduit l'ordre de l'équation différentielle :

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = \text{cste}$$

1.2 Symétries et Théorème de Noether

Pour prouver qu'une transformation dépendante d'un paramètre s est une symétrie, il faut démontrer l'invariance de la forme du Lagrangien : $L(q(s), \dot{q}(s)) = L(q, \dot{q})$.

Méthode : Démontrer une symétrie

1. Écrire les expressions des nouvelles coordonnées $q_i(s)$ données par la transformation.
2. Calculer leurs dérivées temporelles $\dot{q}_i(s)$ par rapport à t.
3. Injecter $q_i(s)$ et $\dot{q}_i(s)$ dans l'expression du Lagrangien.
4. Simplifier pour vérifier que le paramètre s disparaît et que $L' = L$.

1.2.1 Exemple de l'invariance hyperbolique

Soit le Lagrangien $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 - \dot{y}^2) - \frac{1}{2}k(x^2 - y^2)$ soumis à la transformation matricielle :

$$\begin{cases} x(s) = x\cosh(s) + y\sinh(s) \\ y(s) = x\sinh(s) + y\cosh(s) \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{x}(s) = \dot{x}\cosh(s) + \dot{y}\sinh(s) \\ \dot{y}(s) = \dot{x}\sinh(s) + \dot{y}\cosh(s) \end{cases}$$

En substituant dans le nouveau Lagrangien L', les doubles produits s'annulent :

$$\dot{x}(s)^2 - \dot{y}(s)^2 = (\dot{x}^2 - \dot{y}^2)\underbrace{(\cosh^2(s) - \sinh^2(s))}_{=1} = \dot{x}^2 - \dot{y}^2$$

De même pour les positions, on obtient $L' = L$: la transformation est une symétrie continue.

1.2.2 Détermination de la quantité conservée

Méthode : Application du Théorème de Noether

Pour extraire l'intégrale première d'une symétrie continue :

1. **Calculer les générateurs infinitésimaux** h_i en dérivant la transformation par rapport à s au point initial : $h_i = \left.\frac{\partial q_i(s)}{\partial s}\right|_{s=0}$.
2. **Déterminer les impulsions conjuguées** classiques du système : $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$.
3. **Calculer la constante du mouvement** I en effectuant la somme : $I = \sum_i p_i h_i$.

On dérive les coordonnées transformées par rapport au paramètre s en $s = 0$:

$$h_i = \left.\frac{\partial q_i(s)}{\partial s}\right|_{s=0} \implies \begin{cases} h_x = (x \sinh s + y \cosh s)|_{s=0} = y \\ h_y = (x \cosh s + y \sinh s)|_{s=0} = x \end{cases}$$

Les impulsions généralisées (moments conjugués) sont données par $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad \text{et} \qquad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = -m\dot{y}$$

Théorème 2.1 : Constante du mouvement de Noether

L'intégrale première I induite par la symétrie s'écrit :

$$I = \sum_i p_i\, h_i = p_x h_x + p_y h_y = m(y\dot{x} - x\dot{y})$$

1.2.3 Autre exemple : Transformation hélicoïdale

Pour une transformation de la forme $\phi \to \phi + \epsilon$ et $z \to z + \frac{\epsilon}{\lambda}$:

- **Générateurs :** Par identification avec $q_i + \epsilon h_i$, on a $h_\phi = 1$ et $h_z = \frac{1}{\lambda}$.
- **Quantité conservée :** $I = p_\phi \cdot (1) + p_z \cdot \left(\frac{1}{\lambda}\right) = p_\phi + \frac{p_z}{\lambda}$.

1.3 Mécanique Hamiltonienne

Soit une particule de masse m en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) dans un potentiel central $V(r)$:

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2\right) - V(r)$$

Méthode : Construction du Hamiltonien H

Le passage de l'espace des configurations $(q, \dot{q})$ à l'espace des phases (q, p) suit une méthode stricte :

1. Calculer tous les moments conjugués $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$.
2. **Inverser le système** pour isoler chaque vitesse généralisée : $\dot{q}_i = f(q, p)$.
3. Écrire la transformation de Legendre : $H = \sum_i p_i\dot{q}_i - L$.
4. **Substituer impérativement** toutes les expressions de $\dot{q}_i$. Le Hamiltonien final ne doit dépendre **que** de q_i et p_i.

1.3.1 Calcul des moments conjugués

En appliquant la définition $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$:

$$p_r = m\dot{r} \qquad ; \qquad p_\theta = mr^2\dot{\theta} \qquad ; \qquad p_\phi = mr^2\sin^2\theta\dot{\phi}$$

1.3.2 Écriture du Hamiltonien (Transformation de Legendre)

On suit la méthodologie :

1. Inverser les relations pour isoler les vitesses : $\dot{r} = \frac{p_r}{m}$, $\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}$, $\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2\sin^2\theta}$.
2. Injecter dans $H = \sum_i p_i\dot{q}_i - L$ pour éliminer totalement les vitesses.

$$H = \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\theta^2}{mr^2} + \frac{p_\phi^2}{mr^2\sin^2\theta} - \left[\frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2\sin^2\theta} - V(r)\right]$$

$$H(r,\theta,p_r,p_\theta,p_\phi) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2\sin^2\theta} + V(r)$$

1.3.3 Équations de Hamilton

Le système évolue selon les équations canoniques : $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ et $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$.

Coordonnée (q_i)	Équation cinématique ($\dot{q}_i$)	Équation dynamique ($\dot{p}_i$)
Rayon r	$\dot{r} = \frac{p_r}{m}$	$\dot{p}_r = \frac{p_\theta^2}{mr^3} + \frac{p_\phi^2}{mr^3\sin^2\theta} - \frac{dV(r)}{dr}$
Angle θ	$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}$	$\dot{p}_\theta = \frac{p_\phi^2\cos\theta}{mr^2\sin^3\theta}$
Angle ϕ	$\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2\sin^2\theta}$	$\dot{p}_\phi = 0$

Variable cyclique

Puisque ϕ n'apparaît pas explicitement dans H, $\dot{p}_\phi = 0$. L'impulsion p_ϕ (projection du moment cinétique sur l'axe z) est donc une **constante du mouvement**.