1

Chapitre

Cinématique du solide et des solides en contact

1.1 Cinématique du solide

1.1.1 Modèles du solide indéformable

Solide indéformable

Définition 1.1 : Solide indéformable

C'est un solide (S) "idéal" dans lequel les atomes sont rigouresuement fixes les uns par rapport aux autres. Tous les points A et B lui appartenant ont une distance constante au cours du temps.

Ainsi, 3 points situés à des distances fixes forment un solide.

Point lié à un solide

Définition 1.2 : Point lié

C'est un point, à l'interieur ou l'extérieur du solide, restant à une distance fixe de tous les autres points du solide (S).

Notation

On note alors la vitesse du point $A \in S$, $\overrightarrow{v}(A \in S/R)$

Le centre d'une sphère creuse se déplace comme s'il était lié au solide, mais il n'appartient pas au solide.

Degrès de liberté (DDL)

Définition 1.3 : Degrès de liberté

Ce sont des coordonnées importantes indépendants qui définissent la position d'un solide dans l'espace au cours du temps

Ainsi, pour un solide à 3 dimensions, il y a 6 DDL :

- 3 de translation (x,y,z) pour repérer le centre de masse
- 3 de rotation (autour des axes) pour l'orientation des autres points du solide par rapport au centre de masse.

1.1.2 Champ des vitesses dans un solide

Quand on travaille avec un solide, on considère un ensemble de points. La notion de vitesse d'un solide n'a donc pas de sens et on introduit la notion de champ de vitesse.

Si on considère 2 points A et B, on a

Proposition 1.1 : Relation du champ des vitesses dans un solide (Varignon)

$$\overrightarrow{v_{B\in S/R}} = \overrightarrow{v_{A\in S/R}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\omega_{S/R}}$$

avec $\overrightarrow{\Omega}$ le vecteur rotation du solide par rapport à R.

1.1.3 Mouvements d'un solide

Translation d'un solide

Un solide S est en translation par rapport à un référentiel R si tous les points de (S) ont même vitesse par rapport à R ou si $\overrightarrow{\Omega}_{S/R} = \overrightarrow{0}$. On peut avoir une translation

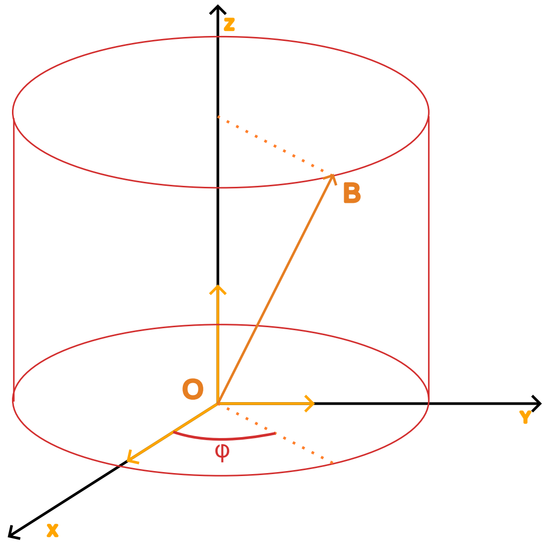
- uniforme : norme de la vitesse de chacun des points est constante
- rectiligne : le vecteur vitesse de tous les points garde une direction constante
- circulaire : la trajectoire est un cercle ×

× **Difficulté**
L'objet ne tourne pas autour de lui-même mais autour d'un point.

Rotation d'un solide autour d'un axe fixe

Un solide s a un mouvement de rotation autour d'un axe fixe par rapport à R s'il existe une droite liée à S dont les points sont fixes par rapport à R. Pour trouver la vitesse d'un point, on applique la relation de Varignon entre un point sur l'axe de rotation, dont on sait que la vitesse est nulle et le point dont on veut connaitre la vitesse [i] On trouve :

$$
\begin{aligned}
\vec{v_B} &= \overrightarrow{v_{O \in S}} + \overrightarrow{BO} \wedge \vec{\Omega} \\
&= \overrightarrow{v_{O \in S}} - \overrightarrow{OB} \wedge \vec{\Omega} \\
&= \vec{0} - (z\vec{e_z} + \rho\vec{e_\rho}) \wedge \dot{\varphi}\vec{e_z} \\
&= \rho\dot{\varphi}\vec{e_\varphi}
\end{aligned}
$$



Angle orienté

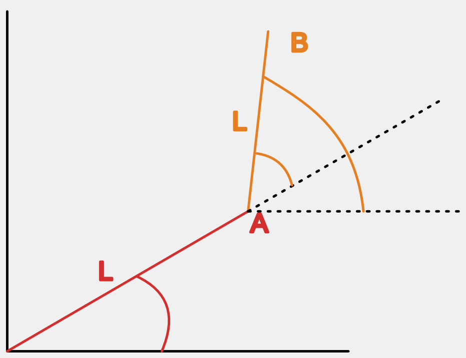
Il faut bien regarder si la rotation est dans le sens horaire (vitesse angulaire positive) ou antihoraire (vitesse angualire négative)

Mouvement général

Le mouvement le plus général d'un solide associe translation et rotation .

Astuce
Le mouvement de n'importe quel point $B \in S$ sera défini à partir de la connaissance de la vitesse d'un autre point de S

Exemple en deux dimensions



On a $l = OA = AB$ et $\varphi_1 = \widehat{\vec{e_x},\overrightarrow{OA}}$ et $\varphi_2 = \widehat{\vec{e_x},\overrightarrow{AB}}$ et $\beta = \widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{AB}}$. De plus, $\overrightarrow{\Omega_{OA}} = \cdot\varphi_1\vec{e_z}$ et $\overrightarrow{\Omega_{AB}} = \cdot\varphi_2\vec{e_z}$ Il faut toujours prendre la vitesse angulaire par rapport à un axe fixe.

En se plaçant dans 2 bases orthonormées, on veut déterminer $\overrightarrow{v_{A/R}}$ et $\overrightarrow{v_{B/R}}$.

Donc, avec Verignon

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V_A/R} &= \overrightarrow{A \in OA/R} = \overrightarrow{v_{A\in AB/R}} \\ &= \overrightarrow{v_{O\in OA/R}} + \overrightarrow{AO} \wedge \vec{\Omega}_{OA/R} \\ &= -l\overrightarrow{e_\rho} \wedge \dot{\varphi}_1\overrightarrow{e_z} \\ &= l\dot{\varphi}_1\overrightarrow{e_{\varphi_1}}\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v_{B\in AB/R}} &= \overrightarrow{A \in OA/R} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}_{AB/R} \\ &= l\dot{\varphi}_1\overrightarrow{e_{\varphi_1}} - l\overrightarrow{e_{\rho_2}} \wedge \dot{\varphi}_2\overrightarrow{e_z} \\ &= l\dot{\varphi}_1\overrightarrow{e_{\varphi_1}} + l\dot{\varphi}_2\overrightarrow{e_{\varphi_2}}\end{aligned}$$

1.2 Cinématique des solides en contact

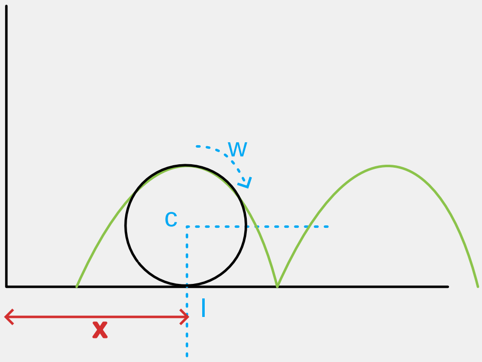
1.2.1 Introduction

On considère 2 solides se déplaçant par rapport à R en restant en contact permanent entre eux. On suppose que le contact est ponctuel et s'effectue au point I. On distingue en I :

- Le point géométrique I
- Le point matériel $I_1 \in S_1$
- Le point matériel $I_2 \in S_2$

Ces derniers sont confondus à l'instant t, mais possèdent une vitesse différente.

Disque (S1) roulant sur un plan (S2)



Dans cet exemple Si on utilise $\overrightarrow{v_{I/R}} = (\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OI}}{\mathrm{d}t})_R = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x\overrightarrow{e_x}) = \dot{x}\overrightarrow{e_x}$, on a la vitesse du point géométrique.

On peut ausssi déterminer $\overrightarrow{v_{I_1 \in S_1}} = \overrightarrow{v_{C \in S_1/R}} + \overrightarrow{I_1C} \wedge \omega\overrightarrow{e_z} = \dot{x}\overrightarrow{e_x} - r\omega\overrightarrow{e_x}$.

Enfin, on sait que $\overrightarrow{v_{I_2}}$ n'a pas de mouvement car le sol est fixe, sa vitesse est donc nulle.

On a bien donc $(\overrightarrow{v_{I_1}} = (\dot{x} - r\omega)\overrightarrow{e_x}) \neq (\overrightarrow{v_I} = \dot{x}\overrightarrow{e_x}) \neq (\overrightarrow{v_{I_2 \in sol}} = \overrightarrow{0})$

1.2.2 Vitesse de glissement

Définition 2.1 : Vitesse de glissement

Notée $\overrightarrow{v_g}$, elle est définie par $\overrightarrow{v_{g1/2}} = \overrightarrow{v_{I_1 \in S_1/R}} - \overrightarrow{v_{I_2 \in S_2/R}}$

Définition 2.2 : Condition de roulement sans glissement

Elle correspond à $\overrightarrow{V_g} = 0$. On a alors $\overrightarrow{v_{I_1 \in S_1/R}} = \overrightarrow{v_{I_2 \in S_2/R}}$

Exemple du disque précédent

On a vu que $\overrightarrow{V_{I_1}} = (\dot{x} - r\omega), \overrightarrow{V_{I_2}} = \overrightarrow{0}$. On en déduit que pour se trouver en CRSG, il faut que $\dot{x} = r\omega$

1.3 Mouvement plan d'un solide

Définition 3.1 : Mouvement plan

C'est un mouvement tel que chaque point du solide S se déplace dans un plan parallèle à un plan fixe Q dans le référentiel R

C'est le cas d'un cylindre roulant autour de lui-même. Un mouvement est plan dans le cas où les actions mécaniques et vitesses initiales sont contenues dans le plan. L'étude du mouvement de S se réduit à l'étude de la section dans le plan Q .

Astuce
On peut avoir la somme des forces qui vaut 0 mais avoir quand même un mouvement (avec des forces opposées mais s'exerçant sur des côtés opposés du solide.)

Astuce
En général la section contenant le centre de masse

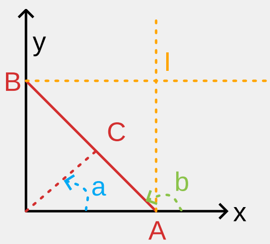
1.3.1 Centre instantané de rotation (CIR)

Définition 3.2 : CIR

On appelle CIR du plan Q' (plan invariablement lié à la section du solide (S) par Q) à l'instant t le point I du solide (S) dont la vitesse par rapport à R est nulle. On a donc

$$\overrightarrow{v_{i\in S}} = \overrightarrow{0}$$

Exemple de l'échelle contre le mur



On a $\Omega = \dot{\beta}\overrightarrow{e_z} = -\dot{\alpha}\overrightarrow{e_z}$ car $\beta = \pi - \alpha$. On cherche le CIR qui vérifie $\overrightarrow{v_{I\in S}} = \overrightarrow{0}$. On a

$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_I} + \overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{\Omega}$$
$$\overrightarrow{v_b} = \overrightarrow{v_i} + \overrightarrow{BI} \wedge \overrightarrow{\Omega}$$

Comme on sait que $\overrightarrow{v_a}$ est selon $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{v_b}$ selon $\overrightarrow{e_y}$, on en déduit que $\overrightarrow{AI}$ est selon $\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{BI}$ selon $\overrightarrow{e_x}$ (en prenant en compte que $\overrightarrow{\Omega}$ est selon $-\overrightarrow{e_z}$)

Ici, ce point I n'est pas le point géométrique.