Chapitre 2

Éléments cinétiques des solides

2.1 Centre de masse

2.1.1 Centre de masse

Définition 1.1 : Centre de masse ou centre d'inertie

Noté C ou G, il est défini par

$$M\overrightarrow{OC} = \int_S \overrightarrow{OA} \cdot \mathrm{d}m = \int_V \overrightarrow{OA} \cdot \rho(A)\mathrm{d}V$$

Il correspond au barycentre des points matériels affectés de leur masse respective :

$$\int_S \overrightarrow{CA}\mathrm{d}m = \overrightarrow{0}$$

La première expression permet de déterminer les coordonnées de C. Il ne faut pas confondre centre de masse et centre d'inertie et centre de gravité

Astuce
Le centre de gravité est confondu avec le centre de masse uniquement si le champ de gravitation uniforme.

2.1.2 Propriétés

Symétries du système

Le centre de masse respecte les symétries du système. Si il existe un élément de symétrie (plan, centre, axe), ce dernier contient le centre de masse.

Associativité

Théorème 1.1 : Associativité du centre de masse

$$\overrightarrow{OC} = \frac{M_1\overrightarrow{OC_1} + M_2\overrightarrow{OC_2}}{M_1 + M_2}$$

2.2 Moment d'inertie

2.2.1 Par rapport à un axe

Définition 2.1 : Moment d'inertie

C'est la quantité

$$I_\Delta = \sum_i d_i^2 = \sum_i m_i \overrightarrow{H_i A_i}^2$$

avec H_i le projeté orthogonal de A_i selon l'axe Δ

Pour un solide, on a

$$I_\Delta = \int\int\int_S \overrightarrow{HA}^2 \rho \mathrm{d}V = \int\int\int \vec{r}^2 \mathrm{d}m$$

avec r la distance de particule par rapport à l'axe ✓ .

✓ **Exemple**
Le moment d'inertie est un obstacle au mouvement circulaire autour de l'axe. Le moment d'inertie a la dimension d'une masse multipliée par une distance au carrée.

2.2.2 Méthode de calcul (symétrie de révolution)

Généralités

Théorème 2.1 : Relation des moment d'un système à symétrie de révolution

$$I_{ox} + I_{oy} = I_{oz} + 2\int_{(S)} z^2 \mathrm{d}m$$

Preuve 2.1 : À savoir démontrer

On étudie le cas d'un cylindre creux ou plein et d'un disque ou

> cerceau. Dans les 2 cas, l'axe Oz est l'axe de symétrie de révolution. Pour des raisons de symétrie, les moments d'inertie I_{ox} et I_{oy} sont les mêmes. Ainsi
>
> $$\begin{aligned} I_{ox} &= \int_{(S)} (y^2+z^2)\mathrm{d}m \\ I_{oy} &= \int_{(S)} (x^2+z^2)\mathrm{d}m \\ I_{ox}+I_{oy} &= \int_{(S)} (y^2+x^2)\mathrm{d}m + 2\int z^2\mathrm{d}m \\ &= I_{oz} + 2\int_{(S)} z^2\mathrm{d}m \end{aligned}$$

Tableau récapitulatif

Forme	Axe de rotation	Valeur
Disque	Oui	$\frac{1}{2}MR^2$
Disque	Perpendiculaire	$\frac{1}{4}MR^2$
Anneau	Oui	MR^2
Anneau	Perpendiculaire	$\frac{1}{2}MR^2$
Cylindre	Oui	$\frac{1}{2}MR^2$
Cylindre	Perpendiculaire	$\frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$
Tube	Oui	MR^2
Tube	Perpendiculaire	$\frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$
Boule	Oui	$\frac{2}{5}MR^2$
Coque	Oui	$\frac{2}{3}MR^2$
Tige	Perpendiculaire	$\frac{1}{12}ML^2$
Tige	Perp. + Extremité	$\frac{1}{3}ML^2$

2.2.3 Opérateurs d'intertie

On souhaiter déterminer les moments d'inertie d'une solide par rapport à une droite passant par O. L'opérateur d'inertie est une matrice 3×3 qui relie la **vitesse angulaire** $\vec{\omega}$ d'un corps rigide à son **moment cinétique** $\vec{L}$ par la relation vectorielle :

$$\vec{L} = \mathbf{I}\vec{\omega}$$

où $\mathbf{I}$ est le tenseur d'inertie ! .

> ! **Attention**
> Contrairement au moment d'inertie scalaire qui ne s'applique qu'à une rotation autour d'un axe fixe, le tenseur d'inertie prend en compte la complexité du mouvement de rotation dans l'espace. En général, le moment cinétique $\vec{L}$ et la vitesse angulaire $\vec{\omega}$ ne sont pas parallèles, sauf si la rotation se fait autour d'un axe de symétrie particulier.

Le tenseur d'inertie $\mathbf{I}$ est représenté par une matrice symétrique de la forme :

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

2.2.4 Axes principaux d'intertie

Définition

Pour tout corps rigide, il existe un système de coordonnées spécifique, appelé **axes principaux d'inertie**, où le tenseur d'inertie est une matrice diagonale. Dans ce système, tous les produits d'inertie sont nuls, et la relation devient :

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \vec{\omega}$$

où I_1, I_2, I_3 sont les moments d'inertie principaux ✓ .

✓ **Exemple**

Lorsque la rotation se fait autour de l'un de ces axes, le moment cinétique est parallèle à la vitesse angulaire, ce qui se traduit par un mouvement de rotation stable.

Détermintaion des API

Pour un corps rigide, il existe une connexion directe entre sa symétrie et ses axes principaux d'inertie (API).

1. **Plan de symétrie :** Si un objet a un plan de symétrie, alors tout axe qui est **perpendiculaire** à ce plan et qui passe par le centre de masse est un API.
2. **Axe de symétrie :** Si un objet peut être tourné sur lui-même autour d'une ligne droite pour se superposer parfaitement, cette ligne est un **axe de symétrie**, et elle est donc aussi un API ✓ .

Astuce

L'axe central est perpendiculaire à la base circulaire, qui est un plan de symétrie. Cet axe central est donc un API.

✓ **Exemple**

L'axe de rotation d'une toupie bien équilibrée est un exemple parfait.

> **! Propriété pour trouver les API**
>
> Si on a trouvé deux axes perpendiculaires qui sont des API, alors le troisième axe, perpendiculaire aux deux premiers, est automatiquement un API. Il suffit de trouver deux axes de symétrie pour trouver le troisième, sans calculs supplémentaires.

2.2.5 Théorème d'Huygens

Théorème

Théorème 2.2 : Théorème d'Huygens

$I_{oz} = I_{cz} + Md^2_{cz,oz}$

Où :

- I_{oz} est le moment d'inertie par rapport au nouvel axe de rotation.
- I_{cz} est le moment d'inertie par rapport à l'axe parallèle passant par le **centre de masse** du corps.
- M est la masse totale du corps.
- d est la distance perpendiculaire entre les deux axes parallèles.

Ce théorème n'est valable qu'avec I_{cz} passant par C, le centre de masse du solide et O un point quelconque [i] .

i Info

Ce théorème repose sur l'idée que la résistance d'un corps à la rotation est plus grande quand il est éloigné de son axe de rotation. Le terme Md^2 ajoute l'inertie supplémentaire due à la translation de l'axe de rotation. Il représente l'inertie de l'ensemble du corps si on le considérait comme une masse ponctuelle située au centre de masse, et tournant autour du nouvel axe.

Utilisation

Soit A et B sont quelconques et C le centre de masse de S. Si on connait I_{az} et que l'on cherche I_{bz}, on écrit $I_{az} = I_{cz} + Md^2_{az,cz}$ puis $I_{bz} = I_{cz} + Md^2_{bz,cz}$ dans lequel on injcete $I_C z$ trouvé avec l'équation précédente.

À ne pas faire

Il ne faut pas écrire $I_{bz} = I_{az} + Md^2_{bz,az}$ car I_{az} car A n'est pas le centre de masse.

Exemple de la tige

Considérons une tige mince, homogène, de masse M et de longueur L. Le moment d'inertie par rapport à un axe perpendiculaire passant par son centre de masse est connu :

$$I_{\text{cm}} = \frac{1}{12}ML^2$$

Pour trouver le moment d'inertie par rapport à un axe parallèle passant par l'une de ses extrémités, la distance entre les deux axes est $d = \frac{L}{2}$.

En appliquant le théorème d'Huygens :

$$\begin{aligned} I &= I_{\text{cm}} + Md^2 \\ &= \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}ML^2 = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{3}{12}ML^2 \\ &= \frac{4}{12}ML^2 = \frac{1}{3}ML^2 \end{aligned}$$

Cela correspond au résultat attendu pour le moment d'inertie d'une tige en rotation autour de l'une de ses extrémités .

Astuce

Ce théorème est un outil puissant pour éviter de refaire des calculs d'intégrale complexes pour chaque nouvel axe de rotation.

2.3 Moment cinétique et quantité de mouvement

2.3.1 Quantité de mouvement

Définition 3.1 : Qt de mouvement / résultante cinétique

C'est la somme des quantités de mouvement de chacun des points du solide :

$$\overrightarrow{P_{(S)}} = \int_{(S)} v_{A\in S}\mathrm{d}m$$

On peut écrire

$$\overrightarrow{P_{(S)}} = \int_{(S)} (\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OA}}{\mathrm{d}t})\mathrm{d}m = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{(S)} \overrightarrow{OA}\mathrm{d}m = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}M\overrightarrow{OC}$$

pour en déduire

Proposition 3.1 : Qt de mouvement avec le centre de masse

$$\vec{P} = M\overrightarrow{v_C}$$

avec C le centre de masse et M la masse du solide.

2.3.2 Moment cinétique

Définition 3.2 : Moment cinétique

C'est la somme des moments cinétiques de chacun des points du solide. Pour un moment défini en O, on a

$$\overrightarrow{L_O} = \int_{(S)} \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{v_A} \mathrm{d}m$$

2.3.3 Torseur cinétique

Le torseur vérifie la règle de transport du moment :

Théorème 3.1 : Règle de transport du moment cinétique

$$\overrightarrow{L_B} = \overrightarrow{L_A} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{P_{(S)}}$$

2.3.4 Quantité de mouvement et moment cinétique dans R*

Définition 3.3 : Référentiel R*

C'est le référentiel du centre de masse associé au solide (S) en translation par rapport au référentiel R et dans lequel $\overrightarrow{v_c} = \overrightarrow{0}$ avec C Le centre de masse et origine de R*.

On sait que

$$L_{B/R*} = \overrightarrow{L_{A/R*}}(S) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{p_{S/R*}}$$

Mais $\overrightarrow{p_{S/R}} = M\overrightarrow{v_{C/R*}} = \overrightarrow{0}$. Donc

Proposition 3.2 : Conséquence du théorème de transport du moment cinétique

$$\overrightarrow{L*} = \overrightarrow{L_C*} = \int_{(S)} \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{v_{A\in S/R*}} \mathrm{d}m$$

2.3.5 Théorème de Koeing relatif au moment cinétique

Théorème 3.2 : Théorème de koeing

$$\overrightarrow{L_{O/R}} = \overrightarrow{L*} + \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{v_{C/R}}M$$

Si on applique ce théorème au point C, à la place de O, point quelconque du solide ou pas :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{L_{C/R}} &= \overrightarrow{L*} + \overrightarrow{CC} \wedge M\overrightarrow{v_C/R}\\ &= \overrightarrow{L*}\end{aligned}$$

Définition 3.4 : Définition du moment cinétique avec les API

$$\overrightarrow{L_{C/R}} = [I]_C\overrightarrow{\omega}$$

Cette définition est utile car on aura souvent $\overrightarrow{\omega}$ porté par un API, donc on aura par exemple $\overrightarrow{\Omega} = \omega\overrightarrow{e_z} \Rightarrow [I]_C\overrightarrow{\Omega} = I_{cz}\omega\overrightarrow{e_z}$.

Théorème de transport et théorème de Keoning

Même si les 2 théorèmes peuvent aboutir à la même chose, il ne faut pas les confondre :

- Transport : $\overrightarrow{L_O/R} = \overrightarrow{L_{C/R}} + \overrightarrow{OC} \wedge M\overrightarrow{v_{C/R}}$
- Koening : $\overrightarrow{L_O/R} = \overrightarrow{L*} + \overrightarrow{OC} \wedge M\overrightarrow{v_{C/R}}$

qui donnent la même chose car $\overrightarrow{L*} = \overrightarrow{L_{C/R}}$

2.4 Énergie cinétique

2.4.1 Définition

Définition 4.1 : Énergie cinétique

C'est la somme des énergies cinétiques de chaque point appartenant à S :

$$E_k(S) \int_{(S)} \frac{1}{2}\overrightarrow{v_{A\in S/R}}^2 \mathrm{d}m$$

2.4.2 Théorème de Koeing

Théorème 4.1 : Koeing pour l'énergie cinétique

$$E_k(S) = E_k^*(S) + \frac{1}{2}M\overrightarrow{v_{C/R}}^2$$

avec $E_k(S)$ l'énergie cinétique de (S) dans R, $E_k^*(S)$ l'énergie cinétique de (S) dans R*, et C le centre de masse.

Analayse

E_k* est l'énergie cinétique de rotation définie par

$$E_k^* = \int_{(S)} \frac{1}{2}\overrightarrow{v_{A\in S/R*}}^2 \mathrm{d}m = \frac{1}{2}\overrightarrow{L_{C/R}} \cdot \overrightarrow{\Omega} = \frac{1}{2}([I]_C \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}})\overrightarrow{\Omega_S/R}$$

Vecteur rotation porté par un API

La plupart du temps, $\overrightarrow{\Omega}$ est porté sur un API, donc

$$E_k^*(S) = \frac{1}{2}(I_\Delta \omega \overrightarrow{e_\Delta})\overrightarrow{\Omega}\overrightarrow{e_\Delta} = \frac{1}{2}I_{c\Delta}\omega^2$$

On en déduit que terme $\frac{1}{2}M\overrightarrow{v_{c/R}}$ correspond à l'énergie cinétique de translation.

2.4.3 Cas d'un solide ayant un point fixe O

Si S a un point fixe O [i] , alors

Proposition 4.1 : Énergie cinétique d'un solide avec pt fixe

i Info

Si de plus $\overrightarrow{\Omega}$ est porté par un API, on aura $E_k(S) = \frac{1}{2}(I_{oz} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}})\overrightarrow{\Omega} = \frac{1}{2}I_{oz}\Omega^2$

$E_k(S) = \frac{1}{2}\overrightarrow{L_{O/R}}(S) \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}}$

Rappel utile : Double produit

On a

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{b} \wedge \vec{c})\vec{a} = \vec{c}(\vec{a} \wedge \vec{b}) = (\vec{a} \wedge \vec{b})\vec{c} = (\vec{c} \wedge \vec{a})\vec{b}$$

Très souvent, on aura $E_k = \frac{1}{2}I_{oz}\Omega^2$ si $\vec{\Omega} = \Omega\vec{e_z}$ car c'est alors porté par un API.