Chapitre 1

Cinématique du solide

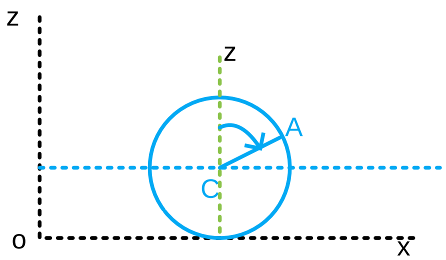
1.1 Disque tournant

Dans le cas d'un disque tournant, le vecteur rotation est $\dot{\alpha}\overrightarrow{e_z}$ et si l'angle est dans le sens anti-horaire, on a $-\dot{\alpha}\overrightarrow{e_z}$

D'après la formule de varignon, on a $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{o} + \overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{\Omega} = \overrightarrow{0}$. Dans le premier cas, en se plaçant en coordonnées polaires on a $\overrightarrow{v_a} = \dot{\alpha}\overrightarrow{e_z} \wedge \rho\overrightarrow{e_\rho} = \dot{\alpha}\rho\overrightarrow{e_\varphi}$. Dans le deuxième cas, on a $-\dot{\alpha}\rho\overrightarrow{e_\varphi} = + - \dot{\alpha}\rho\overrightarrow{e_{\varphi'}}$

Si les 2 vitesses sont positives, le vecteur tourne bien dans le sens de l'angle orienté.

1.2 Point sur le périmètre du disque



Contexte

Un disque de rayon r tourne uniformément autour de son axe, à une vitesse angulaire ω. Son centre C se déplace sur la droite horizontale z = r du plan vertical (Oxz) du référentiel R. On désigne par θ l'angle que fait un rayon avec l'axe (Cz) du disque, A étant un point quelconque situé à la périphérie du disque et repéré par cet angle. La vitesse du centre C du disque par rapport à R est $r\dot{\theta}\overrightarrow{e_x}$.

L'objectif est de trouver l'expression de $\overrightarrow{v_a}$.

On applique Varignon :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v_a} &= \overrightarrow{v_c} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{\omega} \\ &= r\dot{\theta}\overrightarrow{e_x} - r\overrightarrow{e_\rho} \wedge \overrightarrow{e_y} \\ &= r\dot{\theta}\overrightarrow{e_x} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}\end{aligned}$$

On peut laisser le résultat dans la base.

Pour trouver la vitesse en $\theta = \pi$, on exprime le vecteur en fonction de l'angle.

On trouve une vitesse nulle car la vitesse du centre de masse a été choisie pour. On retrouve donc la condition de roulement sans glissement.

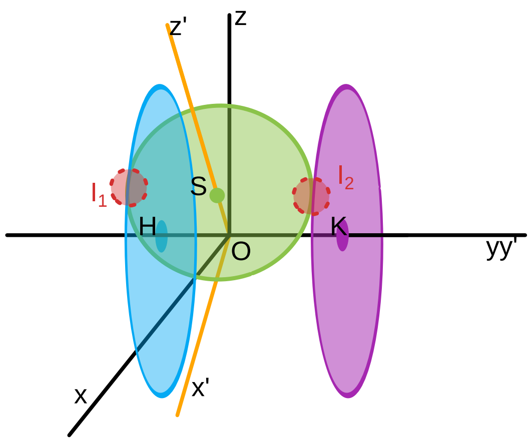
1.3 Différentiel d'une automobile

Contexte

Le bati du différentiel, auquel est fixé le disque S tourne à la vitesse angulaire constante ω autour de l'axe Oy du repère R.

Le satellite, de rayon $a = SI_1 = SI_2$ et de centre S, peut par ailleurs tourner autour de son axe (Oz') tout en restant en contact avec les deux disques identiques P_1 et P_2 – les planétaires – de rayon $b = HI_1 = KI_2$. On note w_0, w_1, w_2 les vitesses angulaires de rotation de S, P_1 et P_2 autour de leurs axes respectifs.

On représente la situation sur cette figure :



Les seuls degrés de liberté du système sont $\omega, \omega_1, \omega_2, \omega_0$.

On cherche d'abord la vitesse du disque S par rapport à R.

On sait que le disque S tourne autour de l'axe y à une distance b de l'axe et à une vitesse ω. On peut donc écrire

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v_S} &= \overrightarrow{v_O} + \overrightarrow{SO} \wedge \overrightarrow{\omega} \\ &= \overrightarrow{0} - b\overrightarrow{e_z} \wedge \omega\overrightarrow{e_y} \\ &= b\omega\overrightarrow{e_x}\end{aligned}$$

On a choisit de fixer ω dans le sens trigonométrique autour de y, donc il est positif.

On rappelle que dans une BOND, $\overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{e_y} = -\overrightarrow{e_x}$

On cherche maintenant les vitesses $\overrightarrow{v_{i1}}, \overrightarrow{v_{i2}}$ des points appartenant au disque S.

Comme on connait désormais la vitesse de S, on peut utiliser le théorème de Varignon. On a donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v_{i1}} &= \overrightarrow{v_S} + \overrightarrow{I_1S} \wedge \overrightarrow{\Omega_S} \\ &= b\omega\overrightarrow{e_x} + a\overrightarrow{e_y} \wedge (\omega_0\overrightarrow{e_z} + \omega\overrightarrow{e_y}) \\ &= (b\omega + a\omega_0)\overrightarrow{e_x}\end{aligned}$$

Attention. Le vecteur rotation du disque S est la somme du vecteur rotation lié à sa rotation autour de l'axe y et du vecteur lié à sa rotation autour de lui-même !

Bien que la base ne soit pas fixe, on peut quand même l'utiliser pour exprimer la vitesse

Pour $\overrightarrow{V_{I2}}$, c'est le même principe

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v_{i2}} &= \overrightarrow{v_S} + \overrightarrow{I_2S} \wedge \overrightarrow{\Omega_S} \\ &= b\omega\overrightarrow{e_x} - a\overrightarrow{e_y} \wedge (\omega_0\overrightarrow{e_z} + \omega\overrightarrow{e_y}) \\ &= (b\omega - a\omega_0)\overrightarrow{e_x}\end{aligned}$$

On peut maintenant trouver des relations entre les ω grace à la condition de roulement sans glissement. Prenons d'abord P_1. Soit $I_{1,p} \in P, I_{1,s} \in S$. On sait par la condition de roulement sans glissement que :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v_{I_{1,s}}} &= \overrightarrow{v_{I_{1,p}}} \\ &= \overrightarrow{v_{H\in P}} + \overrightarrow{I_1H} \wedge \omega_1\overrightarrow{e_y} \\ &= \overrightarrow{0} - b\overrightarrow{e_z} \wedge \omega_1\overrightarrow{e_y} \\ &= +b\omega_1\overrightarrow{e_x} \\ (b\omega + a\omega_0)\overrightarrow{e_x} &= b\omega_1\overrightarrow{e_x} \\ b\omega + a\omega_0 &= b\omega_1\end{aligned}$$

Prenons ensuite P_2. Soit $I_{2,p} \in P, I_{2,s} \in S$. On sait par la condition de roulement sans glissement que :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v_{I_{2,s}}} &= \overrightarrow{v_{I_{2,p}}} \\ &= \overrightarrow{v_{K\in P}} + \overrightarrow{I_2K} \wedge \omega_2\overrightarrow{e_y} \\ &= \overrightarrow{0} - b\overrightarrow{e_z} \wedge \omega_2\overrightarrow{e_y} \\ &= +b\omega_2\overrightarrow{e_x} \\ (b\omega - a\omega_0)\overrightarrow{e_x} &= b\omega_2\overrightarrow{e_x} \\ b\omega - a\omega_0 &= b\omega_2\end{aligned}$$

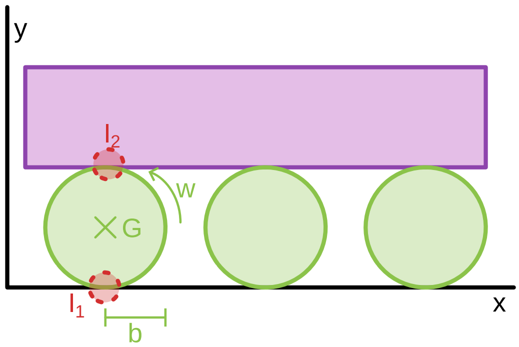
On déduit des 2 résultats précédents que

$$\begin{aligned}2b\omega &= b\omega_1 + b\omega_2 \\ 2\omega &= \omega_1 + \omega_2\end{aligned}$$

Si la voiture est en ligne droite, $\omega_1 = \omega_2$, et en conséquence, comme $2\omega = \omega_1 + \omega_2$, on a $\omega = \omega_1 = \omega_2$. On en déduit que $\omega_0 = 0$ et que le satellite ne tourne pas sur lui-même.

En revanche si une roue est bloquée (cas extrême), on aura par exemple $\omega_1 = 0 \Rightarrow 2\omega = \omega_2$ et $\omega_0 = \frac{-a}{b}\omega$. En virage, $\omega_0 \neq 0$ selon les relations précédentes.

1.4 Roulement d'un bloc de pierre sur des rondins



Contexte

On veut reproduire une expérience d'Obélix qui pousse, à la vitesse $v = v\mathbf{e}_x$, un bloc de pierre (modélisé par un parallélépipède) sur des rondins de bois (cylindres creux de rayon b) qui ne glissent ni sur le sol, ni sous la pierre. On définit I_1 le point de contact d'un rondin sur le sol et I_2 le point de contact du rondin sous la pierre. On désigne par G le centre de masse de ce rondin. On travaille dans le référentiel terrestre supposé galiléen et les rondins de bois tournent à la vitesse angulaire $\omega\overrightarrow{e_z}$ avec ω algébrique.

On souhaite d'abord exprimer les vitesses des points I_1 et I_2 appartenant au rondin de bois en fonction de la vitesse de G. On applique Varignon :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v_{I_1}} &= \overrightarrow{v_G} + \overrightarrow{I_1G} \wedge \omega\overrightarrow{e_z} \\
&= v_g\overrightarrow{e_x} + b\overrightarrow{e_y} \wedge \omega\overrightarrow{e_z} \\
&= v_g\overrightarrow{e_x} + b\omega\overrightarrow{e_x} \\
&= (v_g + b\omega)\overrightarrow{e_x}
\end{aligned}$$

De la même façon, au point I_2, on a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v_{I_2}} &= \overrightarrow{v_G} + \overrightarrow{I_2G} \wedge \omega\overrightarrow{e_z} \\ &= v_g\overrightarrow{e_x} - b\overrightarrow{e_y} \wedge \omega\overrightarrow{e_z} \\ &= v_g\overrightarrow{e_x} - b\omega\overrightarrow{e_x} \\ &= (v_g - b\omega)\overrightarrow{e_x}\end{aligned}$$

Exprimons maintenant les conditions de roulement sans glissement en I_1 et en I_2.

On a $I_1 \in$ sol, $I_1 \in$ roue, avec $\overrightarrow{v_{I_1 \in \text{sol}}} = \overrightarrow{0}$. On en déduit que $\overrightarrow{v_{I1,s}} = (v_g + b\omega)\overrightarrow{e_x} = \overrightarrow{0} \Rightarrow v_g = -\omega b$

Pour I_2, on a $I_2 \in$ pierre, $I_2 \in$ roue, avec $\overrightarrow{v_{I_2 \in \text{pierre}}} = \overrightarrow{v}$ selon l'énoncé et $\overrightarrow{v_{I_2,\text{pierre}}} = (v_g - b\omega)\overrightarrow{e_x}$. On en déduit que $v_g - \omega b = v$.

On peut en déduire la valeur de v_g. Avec les 2 conditions, on trouve que $-2b\omega = v$, ce qui nous permet de trouver une valeur de $\omega = \frac{-v}{2b}$. En injectant cett expression dans la première condition, on trouve que $v_g - (-\frac{v}{2b})b = \frac{v}{2}$.

Astuce

car solide en translation donc tous les points ont la même vitesse.

Exemple

Le signe de ω est négatif, ce qui est cohérent car le rondin tourne dans le sens horaire, la pierre étant poussée vers la droite.