4

Chapitre

Dynamique des solides en contact - Lois de Coulombs

Ce chapitre étudie les lois de Coulomb sur le frottement solide qui décrivent de manière rigoureuse les données observées expérimentalement : Ce sont des lois empiriques.

4.1 Actions de contact et Modélisation

Définition 1.1 : Action de contact

Les actions mécaniques (forces ou moments de force) qu'exercent deux solides en contact l'un sur l'autre dont les surfaces sont en contact.

4.1.1 Composantes de l'action mécanique de contact

L'action mécanique entre deux solides en contact dans le plan P est modélisée par :

- La résultante des forces de contact
- La somme des moments des actions de contact (normales et dans le plan)

Composante	Vecteur	Description
Tangentielle (Frottement)	$\overrightarrow{T}$	Composante tangentielle des actions de contact
Normale (Pression)	$\overrightarrow{N}$	Composante normale des actions de contact avec $\overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{n_{2/1}} \geq 0$.
Moment Normal	$\overrightarrow{M_{I,N}}$	Moment qui s'oppose au mouvement de rotation autour de $\overrightarrow{n}$.
Moment Tangentiel	$\overrightarrow{M_{I,T}}$	Moment qui s'oppose au mouvement de torsion dans le plan P.

4.1.2 Approximation du contact rigoureusement ponctuel

Cela correspond aux situations où le contact est considéré s'effectuer en un point I. Très souvent, ce point appartient au plan contenant le centre de masse.

Définition du Contact Ponctuel

Lorsque le moment en un point I des actions mécaniques de contact est nul, tout se passe comme si ces actions de contact étaient une seule force appliquée en I : on parle de contact ponctuel.

Condition pour choisir I (Exemple du Cube sur pente)

Pour un cube sur une pente, I vérifie la condition $\overrightarrow{M_I} = \overrightarrow{0}$. À l'équilibre $\overrightarrow{M_I}(Poids) + \overrightarrow{M_i}(\text{Actions de Contact}) = \overrightarrow{0}$ et donc $\overrightarrow{M_i}(\text{Actions de Contact}) = \overrightarrow{0}$.

4.2 Lois de Coulombs

4.2.1 Cas sans glissement (Adhérence)

On a alors une vitesse de glissement $\overrightarrow{v_g} = \overrightarrow{0}$.

Théorème 2.1 : Lois de Coulombs sans glissement

La vitesse de glissement reste nulle tant que la force de traction $\overrightarrow{F}$ situé dans le plan P tangent en I aux surfaces limitant les 2 solides n'atteint pas une valeur limite $||\overrightarrow{T_{max}}||$ définie par :

$$||\overrightarrow{T_{max}}|| = \mu_S||\overrightarrow{N}||$$

Avec μ_S le coefficient de frottement statique indépendant de l'aire de contact.

Condition d'Adhérence

On a alors :

$$||\overrightarrow{T}|| \leq \mu_S||\overrightarrow{N}||$$

et $\overrightarrow{v_g} = \overrightarrow{0}$.

Remarques / exemples

On étudie un cube sur un chemin pentu d'angle α avec l'horizontale. Il ne faut pas confondre $\overrightarrow{T}$ le frottement et $\overrightarrow{v_g}$ le glissement. Dans ce cas, $\overrightarrow{v_g} = \overrightarrow{0}$ mais $\overrightarrow{T} \neq \overrightarrow{0}$.

4.2.2 Cas avec glissement (Glissement effectif)

On a une vitesse de glissement $\overrightarrow{v_g} \neq \overrightarrow{0}$.

Théorème 2.2 : Force de Frottement en Glissement

$$\overrightarrow{T} = -\mu_d||\overrightarrow{N}||\frac{\overrightarrow{v_g}}{||\overrightarrow{v_g}||}$$

Avec μ_d le coefficient de frottement dynamique.

Remarque

En pratique, on considère souvent que $\mu_d = \mu_s$ même si c'est en général différent.

4.2.3 Synthèse des Lois de Coulombs

À retenir

- Pas de glissement (Adhérence) : $\vec{v_g} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad ||\vec{T}|| \leq \mu_S ||\vec{N}||$
- Glissement effectif : $\vec{v_g} \neq \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{T} = -\mu_d ||\vec{N}|| \frac{\vec{v_g}}{||\vec{v_g}||}$

4.3 Application : Déplacement d'un Solide à Vitesse Constante

On va comparer le déplacement d'un solide cubique et d'une roue pour déterminer la force $\vec{F}$ à appliquer pour les déplacer à vitesse constante ($\vec{a}_C = \vec{0}$), les 2 solides ayant la même masse M.

4.3.1 Cas du Cube (Glissement)

Le contact est ponctuel en I. La vitesse du point I est $\vec{v}_I = \dot{x}\vec{e_x}$ (glissement effectif).

Bilan des Forces et PFD

Le référentiel d'étude est Galiléen. Bilan des forces : $\sum \vec{F} = \vec{P_C} + \vec{T_I} + \vec{N_I} + \vec{F}$ (où $\vec{F}$ est la force appliquée). Application du PFD ($M\vec{a}_C = \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$ car vitesse constante) :

$$M\ddot{x} = F + T = 0 \quad \Rightarrow \quad F = -T$$
$$M\ddot{y} = -Mg + N = 0 \quad \Rightarrow \quad N = Mg \quad \text{(contact permanent)}$$

Application des Lois de Coulomb

On a glissement $\vec{v_g} = \vec{v_{i1}} - \vec{v_{i2}} = \dot{x}\vec{e_x}$ ($\dot{x} > 0$).

$$\vec{T} = -\mu_d ||\vec{N}|| \frac{\vec{v_g}}{||\vec{v_g}||} = -\mu_d Mg\vec{e_x}$$

Force à Appliquer pour le Cube

$$F = -T = \mu_d Mg$$

4.3.2 Cas de la Roue (CRSG)

Bilan des Forces et PFD

Bilan des forces $\vec{P}, \vec{T}, \vec{N}, \vec{F}$. Théorème du Centre de Masse ($M\vec{a}_C = \vec{0}$) :

$$F = -T \quad \text{et} \quad N = Mg \quad \text{(vitesse constante, contact permanent)}$$

Théorème du Moment Cinétique (TMC) en C

Le TMC en C donne : $\frac{\mathrm{d}\vec{L_C}}{\mathrm{d}t} = \sum \overrightarrow{M_{C,ex}}$.

- $\vec{L_C} = [I]_c\vec{\omega} = I_{cz}\omega\vec{e_z} = \frac{MR^2}{2}\omega\vec{e_z}$.
- $\sum \overrightarrow{M_{C,ex}} = \vec{M_C}(\vec{T} + \vec{N}) = \vec{CI} \wedge (\vec{T} + \vec{N}) = \vec{CI} \wedge \vec{T} = -R\vec{e_y} \wedge T\vec{e_x} = RT\vec{e_z}$.

Par identification :

$$\frac{MR^2}{2}\dot{\omega}\vec{e_z} = RT\vec{e_z} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{MR}{2}\dot{\omega}$$

Condition de Roulement Sans Glissement (CRSG)

En CRSG, $\vec{v}_I = \vec{v}_C + \vec{\Omega} \wedge \vec{CI} = \vec{0}$. La vitesse de glissement est nulle $\vec{v_g} = \vec{0}$.

$$\vec{v}_I = (\dot{x}_C + R\omega)\vec{e_x} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_c = -R\dot{\omega}$$

Puisque le mouvement est à vitesse constante, $\ddot{x}_C = 0$, donc $\dot{\omega} = 0$.

Force à Appliquer pour la Roue en CRSG

Si $\dot{\omega} = 0$, alors $T = 0$, et donc $\boldsymbol{F = 0}$.

Commentaire

Si la roue n'est pas en CRSG (elle glisse), alors on applique la loi de Coulomb avec glissement $||\vec{T}|| = \mu||\vec{N}||$. On retrouve $||\vec{T}|| = \mu Mg \Rightarrow F = \mu Mg$, soit le cas du cube.

4.3.3 Application du TMC à un point mobile I

Le Théorème du Moment Cinétique (TMC) est généralement appliqué à un point fixe ou au centre de masse C. Cependant, il peut également être appliqué à un point mobile I, à condition d'ajouter un terme correctif.

> **Formule du TMC en un Point Mobile I**
>
> $$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_I}}{\mathrm{d}t} + \overrightarrow{v_I} \wedge \overrightarrow{p_S} = \sum \overrightarrow{M_{I,ext}}$$

Où :

- $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_I}}{\mathrm{d}t}$ est la dérivée temporelle du moment cinétique du solide en I.
- $\overrightarrow{v_I}$ est la vitesse du point mobile I.
- $\overrightarrow{p_S} = M\overrightarrow{v_C}$ est la quantité de mouvement du solide S de masse M et de centre de masse C.
- $\overrightarrow{v_I} \wedge \overrightarrow{p_S}$ est le terme correctif, souvent appelé moment de transport.
- $\sum \overrightarrow{M_{I,ext}}$ est la somme des moments des forces extérieures appliquées au solide, calculés au point I.

Application au cas de la Roue en Translation Pure

Dans le cas de la roue étudiée :

- Point I : On choisit I comme le point d'application des actions de contact $\overrightarrow{T}$ et $\overrightarrow{N}$.
- Moment des actions de contact en I : Par définition du point d'application, le moment des actions de contact est nul en I :

$$\overrightarrow{M_I}(\overrightarrow{T} + \overrightarrow{N}) = \overrightarrow{0}$$

- Moment de transport ($\overrightarrow{v_I} \wedge \overrightarrow{p_S}$) : La vitesse du point I est $\overrightarrow{v_i} = \dot{x}\overrightarrow{e_x}$ (vitesse de translation). La quantité de mouvement est $\overrightarrow{p_S} = M\overrightarrow{v_C} = M\dot{x}\overrightarrow{e_x}$. Les deux vecteurs sont colinéaires, donc leur produit vectoriel est nul :

$$\overrightarrow{v_i} \wedge \overrightarrow{p_s} = \dot{x}\overrightarrow{e_x} \wedge M\dot{x}\overrightarrow{e_x} = \overrightarrow{0}$$

- Moment Cinétique en I ($\overrightarrow{L_I}$) : $\overrightarrow{L_I}$ est donné par :

$$\overrightarrow{L_I} = [I]_I\overrightarrow{\Omega} = I_{iz}\omega\overrightarrow{e_z}$$

I_{iz} est le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe $(I, \overrightarrow{e_z})$. Il peut être obtenu grâce au théorème de Huygens : $I_{iz} = I_{Cz} + MR^2$. Pour un disque ($I_{Cz} = \frac{1}{2}MR^2$), on a $I_{iz} = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$.

- Somme des Moments Extérieurs en I :

$$\sum \overrightarrow{M_{I,ext}} = \overrightarrow{M_I}(\overrightarrow{P}) + \overrightarrow{M_i}(\overrightarrow{T} + \overrightarrow{N}) + \overrightarrow{M_i}(\overrightarrow{F})$$

$$\sum \overrightarrow{M_{I,ext}} = \overrightarrow{IC} \wedge \overrightarrow{P} + \overrightarrow{0} + \overrightarrow{IC} \wedge \overrightarrow{F}$$

Avec $\overrightarrow{IC} = R\overrightarrow{e_y}$.

$$\overrightarrow{M_I}(\overrightarrow{P}) = R\overrightarrow{e_y} \wedge (-Mg\overrightarrow{e_y}) = \overrightarrow{0}$$

$$\overrightarrow{M_i}(\overrightarrow{F}) = R\overrightarrow{e_y} \wedge F\overrightarrow{e_x} = -RF\overrightarrow{e_z}$$

Équation Finale du TMC en I

L'application du TMC se simplifie alors pour donner :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_I}}{\mathrm{d}t} = \sum \overrightarrow{M_{I,ext}}$$

En utilisant $I_{iz} = \frac{3}{2}MR^2$, on obtient :

$$\frac{3}{2}MR^2\dot{\omega}\overrightarrow{e_z} = -RF\overrightarrow{e_z} \quad \Rightarrow \quad F = -\frac{3}{2}MR\dot{\omega}$$

Ce résultat est différent de celui obtenu en C ($T = \frac{1}{2}MR\dot{\omega}$) mais permet, combiné au PFD, de résoudre le système.

Cohérence des Résultats : Le Rôle du PFD

Les résultats obtenus par l'application du TMC au centre de masse C et au point de contact I sont a priori différents, mais ils décrivent le même mouvement et sont parfaitement cohérents lorsqu'ils sont combinés avec le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) en translation.

Démonstration de la cohérence : En substituant l'expression de T (issue du TMC en C) et de $\ddot{x}_C$ (issue de la condition CRSG) dans l'équation du PFD, on retrouve l'expression obtenue par le TMC en I.

$$F = M\ddot{x}_C - T$$

$$F = M(-R\dot{\omega}) - \left(\frac{1}{2}MR\dot{\omega}\right) \quad \text{(Substitution des expressions)}$$

$$F = -MR\dot{\omega} - \frac{1}{2}MR\dot{\omega}$$

$$F = \left(-1 - \frac{1}{2}\right)MR\dot{\omega}$$

$$F = -\frac{3}{2}MR\dot{\omega}$$

Ce résultat est exactement celui obtenu directement par l'application du TMC au point I.

Conclusion

Les deux approches (TMC en C combiné au PFD, ou TMC en I) sont équivalentes et mènent aux mêmes équations du mouvement. L'utilisation du TMC en I est souvent privilégiée car elle annule le moment des forces de contact ($\overrightarrow{T}$ et $\overrightarrow{N}$), simplifiant le calcul de la somme des moments.