Chapitre 2

Interférences d'ondes lumineuses

2.1 Formulaires

Théorème 1.1 : Principe de superposition

Pour 2 ondes de même pulsation, on n'additionne pas les intensités I mais les fonctions d'onde.

Proposition 1.1 : Intensité résultantes du principe de superposition

Pour $\underline{\psi(\overrightarrow{r},t)_1} = \psi_{10}(\overrightarrow{r})e^{-i(\omega t+\phi_1(\overrightarrow{r}))}$ et

$\underline{\psi(\overrightarrow{r},t)_2} = \psi_{20}(\overrightarrow{r})e^{-i(\omega t+\phi_1(\overrightarrow{r}))}$,

on a $I(\overrightarrow{r}) = I_1(\overrightarrow{r}) + I_2(\overrightarrow{r}) + 2\sqrt{I_1(\overrightarrow{r}) + I_2(\overrightarrow{r})}\cos(\phi_2(\overrightarrow{r}) - \phi_1(\overrightarrow{r}))$ avec $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$ le terme d'interférence

Proposition 1.2 : Interférences constructives

Si $\cos(\Delta\phi) > 0$, on a des interférences constructives, dans le cas contraire, elles sont destructives.

Définition 1.1 : Ordre d'interférence

$p = \frac{\Delta\phi}{2\pi}$. Quand il est entier, I est maximal, quand il est demi-entier, I est minimal

Définition 1.2 : Visibilité

$$V = \frac{I_{max} - I_{max}}{I_{max} + I_{min}}$$

2.2 Calculs à connaître

2.2.1 2 ondes planes

On prend $\underline{\psi(\overrightarrow{r}, t)_1} = \psi_{10} e^{i(\overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{r} - \omega t + \varphi_1)}$ et $\underline{\psi(\overrightarrow{r}, t)_2} = \psi_{20} e^{i(\overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{r} - \omega t + \varphi_2)}$ de même pulsation, norme de vecteur d'onde k mais $\overrightarrow{k_1} \neq \overrightarrow{k_2}$ i .

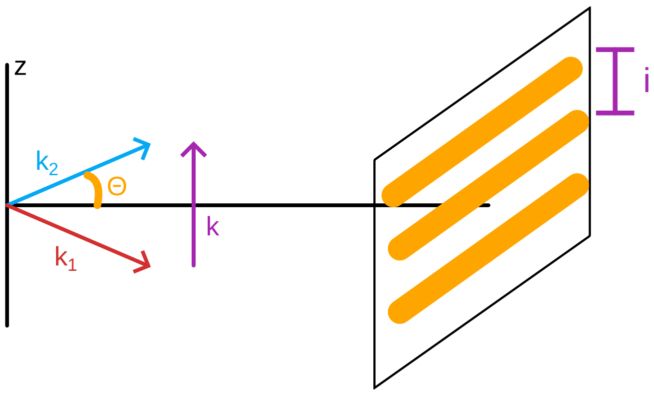
On a

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= \phi_2 - \phi_1 \\ &= (\overrightarrow{k_2} \cdot \overrightarrow{r} + \varphi_2) - (\overrightarrow{k_1} \cdot \overrightarrow{r} + \varphi_1) \\ &= (\overrightarrow{k_2} - \overrightarrow{k_1}) \cdot \overrightarrow{r} + (\varphi_2 - \varphi_1) \\ &= 2k\sin(\theta)\overrightarrow{e_z} \\ &= \overrightarrow{k}\end{aligned}$$

On a

$$I(\overrightarrow{r}) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(2k\sin(\theta)z)$$

On verra donc sur un écran des franges (lignes) !



i **Info**
Ainsi, $||\overrightarrow{k_1}|| = \frac{n\omega}{c} = ||\overrightarrow{k_2}||$. Seule la direction change.

Le second terme est un décalage uniforme que l'on peut choisir nul

$\overrightarrow{k}$ est la différence entre les 2 vecteurs d'onde, il vaut ici $2k\sin(\theta)\overrightarrow{e_z}$

! **Attention**
Pour avoir cette distance visible à l'œil nu (i = 1mm) et $\lambda = 500nm$, il faut $\sin(\theta) = 2.5 \cdot 10^{-5}$. Il faut donc un très petit angle.

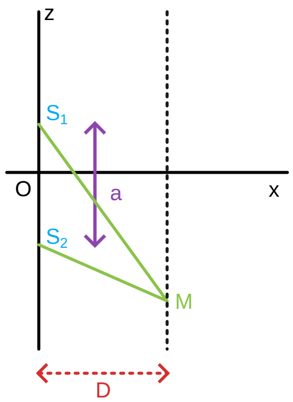
Définition 2.1 : Interfrange de 2 ondes planes

C'est la distance entre les franges, notée i avec

$$i = \frac{2\pi}{2k\sin(\theta)} = \frac{\lambda}{2\sin(\theta)}$$

2.2.2 2 ondes sphériques

Écran parallèle



On note $\psi(\overrightarrow{r}, t)_1 = \frac{A}{r_1} e^{i(kr_1 - \omega t - \varphi_1)}$ et $\psi(\overrightarrow{r}, t)_2 = \frac{A}{r_2} e^{i(kr_2 - \omega t - \varphi_2)}$

On cherche la différence de phase :

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= (kS_2M - \varphi_2) - (kS_1M - \varphi_1)\\ &= k(S_2M - S_1M) - (\varphi_2 - \varphi_1)\\ &= \frac{2\pi}{\lambda_0} n(S_2M - S_1M)\\ &= \frac{2\pi}{\lambda_0}((S_2M) - (S_1M))\\ &= \frac{2\pi}{\lambda_0}(\delta)\end{aligned}$$

On suppose que $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$.

> **Hypothèse / Simplification**
>
> On suppose que l'écran est loin des sources. Cela amène la simplification suivante : $D >> a$ et M est proche du centre de l'écran, donc $D >> x, y$

On peut donc prendre $I_1 \simeq I_2 \simeq |\frac{A}{r}|^2 = I_0$. ×

× Difficulté
On ne peut pas faire cette hypothèse pour la phase car elle évolue beaucoup plus rapidement, sur de plus petites distances, à l'échelle de λ. Elle se trouve en effet dans un cosinus et est très petite. On garde donc $r_1 \neq r_2$ dans la phase.

On calcule S_1M :

$$\begin{aligned}S_1M &= \sqrt{D^2 + y^2 + (z - \frac{a}{2})^2}\\ &= (D^2(1 + \frac{y^2}{D^2} + \frac{(z-a/2)^2}{D^2}))^{\frac{1}{2}}\\ &\simeq D(1 + \frac{y^2}{2D^2} + \frac{(z-a/2)^2}{2D^2})\end{aligned}$$

C'est ici que l'on utilise l'hypothèse : on a toujours $D >> y, z$, donc on peut écrire que, donc on peut utiliser le DL $(1+\epsilon)^{1/2}$ à l'ordre 1

De même pour S_2M :

$$S_2M \simeq D(1 + \frac{y^2}{2D^2} + \frac{(z+a/2)^2}{2D^2})$$

On peut maintenant calculer la différence de marche δ :

$$\begin{aligned}
\delta &= n(r_2 - r_1) \\
&= \frac{n}{2D}((z+a/2)^2 - (z-a/2)^2) \\
&= \frac{naz}{D} \\
\Delta\varphi &= \frac{2\pi az}{\lambda D}
\end{aligned}$$

On en déduit l'intensité en M :

$$\begin{aligned}
I_M &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\Delta\phi) \\
&= I_0 + I_0 + 2\sqrt{I_0^2}\cos(\Delta\phi) \\
&= 2I_0 + 2I_0\cos(\Delta\phi) \\
&= 2I_0(1+\cos(\frac{2\pi az}{\lambda D}))
\end{aligned}$$

Proposition 2.1 : Intensité d'interférence sur un tableau

$$I_M = 2I_0(1+\cos(\frac{2\pi az}{\lambda D}))$$

On cherche maintenant l'Interfrange i (période spatiale de l'interférogramme) :

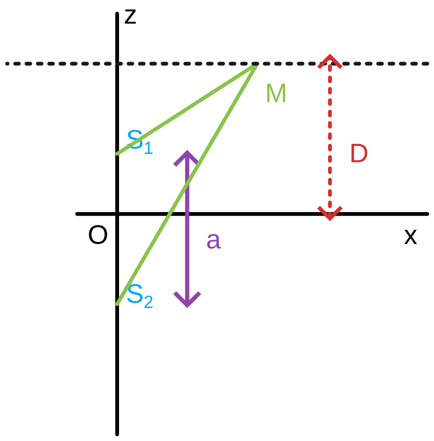
$$\begin{aligned}
\phi(x+i) &= \phi(x) + 2\pi \\
\frac{2\pi a(x+i)}{\lambda_0 D} &= \frac{2\pi ax}{\lambda_0 D} + 2\pi \\
\frac{a(x+i)}{\lambda_0 D} &= \frac{ax}{\lambda_0 D} + 1 \\
\frac{ai}{\lambda_0 D} &= +1
\end{aligned}$$

$i = \frac{\lambda D}{a}$ ✓

✓ **Exemple**

Pour l'observer, il faut que i soit de l'ordre du mm. En prenant $\lambda = 500nm$, donc $\frac{D}{a} \simeq 10^3$, donc $a \simeq 1mm$

Écran perpendiculaire



On suppose également l'écran loin des sources et M proche du centre.

On trouve que $\delta = na(1 - \frac{x^2+y^2}{2D^2})$ et $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} na(1 - \frac{x^2+y^2}{2D^2})$. On en déduit $I(M) = 2I_0(1 + \cos(\frac{2\pi}{\lambda_0} na(1 - \frac{x^2+y^2}{2D^2})))$

La forme géométrique de l'interférogramme (lieux d'égale intensité). On cherche donc $\Delta\varphi = Cst \iff x^2 + y^2 = Cst$ qui est l'équation d'un cercle centré au centre de l'écran.

Dans cette configuration, l'écran est perpendiculaire à l'axe joignant les deux sources S_1 et S_2. On suppose que les sources sont situées sur l'axe des x en $S_1 = (-a/2, 0, 0)$ et $S_2 = (a/2, 0, 0)$. L'écran est un plan situé à une distance D des sources, donc dans le plan d'équation $x = D$. Un point M sur l'écran a les coordonnées (D, y, z).

Le calcul de la **différence de marche optique** δ nécessite de déterminer les distances S_1M et S_2M en utilisant le théorème de Pythagore dans l'espace.

$$S_1M = \sqrt{(D - (-a/2))^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{(D + a/2)^2 + y^2 + z^2}$$
$$S_2M = \sqrt{(D - a/2)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{(D - a/2)^2 + y^2 + z^2}$$

> **Hypothèse**
>
> On utilise les mêmes hypothèses que précédemment

On utilise l'approximation du développement limité à l'ordre 1 pour

$\sqrt{1+\epsilon} \simeq 1+\epsilon/2.$

$$\begin{aligned}
S_1M &= \sqrt{x^2+y^2+(D-\frac{a}{2})^2} \\
&= (D-\frac{a}{2})\sqrt{1+\frac{y^2+x^2}{(D-\frac{a}{2})^2}} \\
&\simeq (D-\frac{a}{2})+\frac{y^2+x^2}{2(D-\frac{a}{2})^2} \\
&= D-\frac{a}{2}+\frac{y^2+x^2}{2(D-\frac{a}{2})^2}
\end{aligned}$$

De même pour S_2M :

$$S_2M \simeq D+\frac{a}{2}+\frac{y^2+x^2}{2(D+\frac{a}{2})^2}$$

Calculons la différence de marche $\delta = n(S_2M - S_1M)$:

$$\begin{aligned}
\delta &= n\left[a+\frac{x^2+y^2}{2}(\frac{1}{D+\frac{a}{2}}-\frac{1}{D-\frac{a}{2}})\right] \\
&= n\left[a+\frac{x^2+y^2}{2}(\frac{(D-\frac{a}{2})-(D+\frac{a}{2})}{D^2-\frac{a^2}{4}})\right] \\
&= n\left[a+\frac{x^2+y^2}{2}(\frac{-a}{D^2-\frac{a^2}{4}})\right] \\
&= n\left[a+\frac{x^2+y^2}{2}(\frac{-a}{D^2})\right] \\
&= na(1-\frac{x^2+y^2}{2D^2})
\end{aligned}$$

On suppose aussi que $D >> a$, ce qui sera toujours le cas en pratique

La différence de phase vaut alors

$$\Delta\phi = 2\pi\frac{na}{\lambda_0}(1-\frac{x^2+y^2}{2D^2})$$

Les lignes d'égale intensité correspondent à $\Delta\varphi =$ constante.

$$\begin{aligned}
1-\frac{y^2+x^2}{2D^2} &= \text{constante} \\
\frac{y^2+x^2}{2D^2} &= \text{constante} \\
y^2+x^2 &= \text{constante}
\end{aligned}$$

Cette équation représente un cercle centré à l'origine $(y,x) = (0,0)$ de l'écran. L'interférogramme prend donc la forme d'anneaux concentriques. Ce type de franges circulaires est typique des interférences localisées à l'infini ou des franges d'égale inclinaison, comme celles observées avec un Michelson lorsque les miroirs sont parfaitement parallèles.