Chapitre 1

Fonctions de plusieurs variables

1.1 Dérivées Partielles

Définition 1.1 : Dérivée partielle

La dérivée partielle de $f(x_1, \ldots, x_n)$ par rapport à x_i est la dérivée de f par rapport à x_i en considérant toutes les autres variables x_j $(j \neq i)$ comme des constantes. On la note $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Pour lever l'ambiguïté lorsque les variables d'une fonction ne sont pas explicites, on note la variable maintenue constante en indice ✓ .

✓ Exemple

Par exemple, $(\frac{\partial U}{\partial T})_V$ est la dérivée de l'énergie interne U par rapport à la température T à volume V constant.

Théorème 1.1 : Schwarz

Si les dérivées partielles secondes croisées $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existent et sont continues en un point (x_0, y_0), alors elles sont égales en ce point :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

1.2 Différentiabilité

1.2.1 Rappel : Fonctions d'une variable

Une fonction $f(x)$ est différentiable (équivalent à dérivable pour une variable) en x_0 si on peut l'approcher localement par une fonction linéaire (sa tangente). La variation $\Delta f = f(x+\mathrm{d}x) - f(x)$ est approximée par la différentielle $\mathrm{d}f = f'(x)\mathrm{d}x$. On a donc $\frac{\mathrm{d}d}{\mathrm{d}x} = f'(x)$

1.2.2 Différentielle d'une fonction de plusieurs variables

Définition 2.1

Une fonction $f(x_1, \ldots, x_n)$ est différentiable en un point $\vec{a}$ si sa variation peut être approchée par une application linéaire de l'accroissement $d\vec{x} = (\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n)$. La différentielle $\mathrm{d}f$ est donnée par :

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i$$

1.2.3 Différentielle Totale Exacte

Une forme différentielle $\omega = A(x,y)\mathrm{d}x + B(x,y)\mathrm{d}y$ est une **différentielle totale exacte** s'il existe une fonction $f(x,y)$ telle que $\omega = \mathrm{d}f$ [i]. Cela est vrai si la relation suivante est vérifiée :

> **i Info**
> Physiquement, cela signifie qu'une force $\vec{F} = (A, B)$ est conservative et dérive d'une énergie potentielle $E_p = -f$.

Théorème 2.1 : Relation de Cauchy

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$$

Vérifier si une forme différentielle est exacte et trouver la fonction f dont elle dérive

1. **Vérification de la relation de Cauchy :** Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial A}{\partial y}$ et $\frac{\partial B}{\partial x}$. Si $\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$, la forme différentielle est une différentielle totale exacte. Sinon, elle ne l'est pas et il n'existe pas de fonction f.
2. **Reconstruction de la fonction f :** Si la relation de Cauchy est vérifiée, on sait que $\frac{\partial f}{\partial x} = A(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = B(x,y)$. On peut intégrer une de ces deux équations pour trouver f.
3. **Intégration par rapport à x :** On intègre $\frac{\partial f}{\partial x} = A(x,y)$ par rapport à x, en considérant y comme une constante. La "constante d'intégration" est alors une fonction de y, notée $g(y)$:

$$f(x,y) = \int A(x,y)dx + g(y)$$

4. **Détermination de $g(y)$:** Pour trouver $g(y)$, on dérive l'expression obtenue pour $f(x,y)$ par rapport à y :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int A(x,y)dx\right) + g'(y)$$

On compare cette expression à l'équation initiale $\frac{\partial f}{\partial y} = B(x,y)$. On peut alors isoler $g'(y)$ et l'intégrer pour trouver $g(y)$.

5. **Vérification et solution :** Une fois $g(y)$ trouvé, on le remplace dans l'expression de $f(x,y)$ de l'étape 3. On peut vérifier la solution en calculant les dérivées partielles de la fonction f obtenue et en s'assurant qu'elles correspondent à A et B.

Exemple

On considère la forme différentielle :

$$\omega = (2x+2y)\mathrm{d}x + (2x-2y+1)\mathrm{d}y$$

Ici, $A(x,y) = 2x+2y$ et $B(x,y) = 2x-2y+1$.

1. **Vérification de la relation de Cauchy :** Calculons les dérivées partielles croisées :

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x+2y) = 2$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2x-2y+1) = 2$$

Comme $\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$, la forme différentielle ω est bien une différentielle totale exacte.

2. **Recherche de la fonction f :** On cherche une fonction $f(x,y)$ telle que $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x+2y$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x-2y+1$.

3. **Intégration par rapport à x :** Intégrons la première équation par rapport à x :

$$f(x,y) = \int (2x+2y)\mathrm{d}x = x^2 + 2xy + g(y)$$

où $g(y)$ est la "constante d'intégration" qui ne dépend que de y.

4. **Détermination de $g(y)$:** Maintenant, dérivons cette expression de $f(x,y)$ par rapport à y :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 2xy + g(y)) = 2x + g'(y)$$

Comparons ce résultat avec l'expression de $B(x,y)$:

$$2x + g'(y) = 2x - 2y + 1$$

On en déduit que $g'(y) = -2y+1$. Il ne reste plus qu'à intégrer cette expression pour trouver $g(y)$:

$$g(y) = \int (-2y+1)dy = -y^2 + y + C$$

où C est une constante arbitraire.

5. **Solution et vérification :** En remplaçant $g(y)$ dans l'expression de $f(x,y)$, on trouve la fonction recherchée :

$$f(x,y) = x^2 + 2xy - y^2 + y + C$$

On peut vérifier ce résultat en recalculant les dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y = A(x,y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x - 2y + 1 = B(x,y)$$

Les dérivées correspondent bien à la forme différentielle initiale, donc notre solution est correcte.

1.3 Développements de Taylor

1.3.1 Formule de Taylor à l'ordre 2

Pour une fonction $f(x,y)$ deux fois différentiable en (x_0,y_0), on a avec $\mathrm{d}x = x - x_0$ et $\mathrm{d}y = y - y_0$:

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\mathrm{d}y$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\mathrm{d}x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\mathrm{d}y^2\right)$$

Astuce
Cette formule fonctionne bien si la fonction a une expression simple. Si ce n'est pas le cas, les dérivées partielles successives de f peuvent engendrer des expressions compliquées avant d'être évaluées. Il vaudra mieux utilisr les DL de fonctions usuelles.

1.3.2 En pratique

On utilise les DL des fonctions usuelles :

Fonction	DL en 0 à l'ordre 2
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$
$\cos(x)$	$1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$
$\sin(x)$	$x + o(x^2)$
$\cosh(x)$	$1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$
$\sinh(x)$	$x + o(x^2)$
$(1+x)^{-1}$	$1 - x + x^2 + o(x^2)$
$\sqrt{1+x}$	$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$
$(1+x)^\alpha$	$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2)$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

Info
On peut remplacer x par n'importe quelle autre variable. Ainsi, si les termes x^2, y^2 sont d'ordre 2, ceux en xy le sont aussi.

1.4 Règle de la Chaîne

Théorème 4.1 : RG pour une fonction d'une variable

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

Si $z = f(x, y)$ et que x et y sont des fonctions de t, alors :

Théorème 4.2 : RG pour une fonction de 2 variables

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

Si x et y dépendent de deux variables s et t, on a :

Théorème 4.3 : RG pour une fonction de 2 variables généralisé

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

1.5 Extrema de fonctions

On introduit H_f la **matrice Hessienne** :

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}_{(x_0, y_0)}$$

1.5.1 Extrema Libres

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$. Un point $\overrightarrow{a} \in D$ est un **point critique** si son gradient y est nul : $\frac{\partial f}{\partial x}(\overrightarrow{a}) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(\overrightarrow{a}) = 0$. Pour déterminer la nature d'un point critique $\overrightarrow{a}$, on calcule les éléments de la matrice Hessienne $H_f(\overrightarrow{a}) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$.

Théorème 5.1 : Matrice hessienne et extrema

1. Si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$, f admet un **minimum local** strict en $\overrightarrow{a}$.
2. Si $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$, f admet un **maximum local** strict en $\overrightarrow{a}$.
3. Si $rt - s^2 < 0$, f admet un **point selle** en $\overrightarrow{a}$.
4. Si $rt - s^2 = 0$, on ne peut pas conclure avec cette méthode.

1.5.2 Extrema Liés (Multiplicateur de Lagrange)

Méthode

Pour trouver les extrema d'une fonction $f(x, y)$ sous une contrainte $g(x, y) = 0$, on utilise la méthode du multiplicateur de Lagrange.

1. On introduit une fonction auxiliaire $f_\lambda(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$, où λ est le multiplicateur de Lagrange.
2. On cherche les points critiques de f_λ en résolvant le système :

   $$\begin{cases} \frac{\partial f_\lambda}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f_\lambda}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

   Cela donne les points critiques $(x^*(\lambda), y^*(\lambda))$ qui dépendent de λ.
3. On injecte ces points dans l'équation de contrainte $g(x^*(\lambda), y^*(\lambda)) = 0$ pour trouver la ou les valeurs de $\lambda = \lambda^*$.
4. Les points $(x^*(\lambda^*), y^*(\lambda^*))$ sont les extrema de f sous la contrainte $g = 0$.

Cette méthode se généralise à plus de variables et plus de contraintes.

Exemple

1. **Introduction d'une fonction auxiliaire** On définit la fonction auxiliaire $f_\lambda(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$, avec $g(x, y) = x + y - 1$.

   $$f_\lambda(x, y) = x \ln x + y \ln y + x - y + \lambda(x + y - 1)$$

2. **Recherche des points critiques** On résout le système des dérivées partielles nulles :

   $$\frac{\partial f_\lambda}{\partial x} = (\ln x + 1) + 1 + \lambda = \ln x + 2 + \lambda = 0$$
   $$\frac{\partial f_\lambda}{\partial y} = (\ln y + 1) - 1 + \lambda = \ln y + \lambda = 0$$

On exprime x et y en fonction de λ :

$$\ln x = -2 - \lambda \implies x = e^{-2-\lambda}$$
$$\ln y = -\lambda \implies y = e^{-\lambda}$$

Les points critiques sont donc de la forme $(x^*(\lambda), y^*(\lambda)) = (e^{-2-\lambda}, e^{-\lambda})$.

3. **Injection dans l'équation de contrainte** On substitue les expressions de x et y dans la contrainte $x + y - 1 = 0$ pour trouver la valeur de λ.

$$e^{-2-\lambda} + e^{-\lambda} - 1 = 0$$
$$e^{-2}e^{-\lambda} + e^{-\lambda} = 1$$
$$e^{-\lambda}(e^{-2} + 1) = 1$$
$$e^{-\lambda} = \frac{1}{1 + e^{-2}}$$

En prenant le logarithme naturel :

$$-\lambda = \ln\left(\frac{1}{1 + e^{-2}}\right) = -\ln(1 + e^{-2})$$

D'où la valeur de $\lambda^* = \ln(1 + e^{-2})$.

4. **Détermination de l'extremum** On remplace λ^* dans les expressions de $x^*(\lambda)$ et $y^*(\lambda)$ pour obtenir les coordonnées de l'extremum.

$$x^* = e^{-2-\lambda^*} = e^{-2}e^{-\lambda^*} = e^{-2}\left(\frac{1}{1 + e^{-2}}\right) = \frac{e^{-2}}{1 + e^{-2}}$$
$$y^* = e^{-\lambda^*} = \frac{1}{1 + e^{-2}}$$

Le point de l'extremum est $\left(\frac{e^{-2}}{1+e^{-2}}, \frac{1}{1+e^{-2}}\right)$.