Chapitre 1

Intégration

1.1 Techniques de base

1.1.1 Intégration par parties

Soient u, v 2 fonctions C^1 (continues de dérivée continues) sur $[a, b]$. Alors

Classe C^n
f est C^n sur $[a, b]$ si f est n fois dérivables sur $[a, b]$ et f^n est continue sur $[a, b]$. C^∞ si $\forall n \in \mathbb{N}, f^n$ existe.

Théorème 1.1 : Formule

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$$

1.1.2 Changement de variable dans une intégrale

Théorème 1.2 :

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable

Soit $\varphi[\alpha, \beta] \to [a, b]$ une application bijective et C^1. On note φ^{-1} l'application réciproque

Alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$.

1.1.3 Méthode

Vérifications à faire

Avant d'intégrer, il faut toujours vérifier que la fonction est intégrable, c'est à dire qu'elle est monotone ou continue sur $[a, b]$.

Première méthode

Il faut que la fonction u choisie soit bijective pour appliquer cette méthode !

1. On pose $t = \varphi(u)$
2. $\mathrm{d}t = \varphi'(u)\mathrm{d}u$
3. Valeurs aux bornes $t = a \Rightarrow u = \varphi^{-1}(a)$ et $t = b \Rightarrow u = \varphi^{-1}(b)$

Variante

Variante dans le calcul de primitive. On n'exige pas le fait que cela soit bijectif

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$

$$\int f(t)\mathrm{d}t = \int f \circ \varphi(u)\varphi'(u)\mathrm{d}u$$

On pose $t = \varphi(u)$ et $\mathrm{d}t = \varphi'(u)\mathrm{d}u$

Si $F = \int f$ et f continue sur $[a, b]$, $(F \circ \varphi)' = F' \circ \varphi \times \varphi' = f \circ \varphi \times \varphi'$

1.1.4 En pratique

Exemple 1

Calculons :

$$\int_0^1 \sqrt{e^x - 1}$$

On va effectuer un changement de variable pour tenter d'enlever la racine.

On pose donc $u = \sqrt{e^x - 1}$. Calculons maintenant $\mathrm{d}u$ pour en déduire $\mathrm{d}x$: $\mathrm{d}u = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}\mathrm{d}x = \frac{e^x-1+1}{2u}\mathrm{d}x = \frac{u^2+1}{2u}\mathrm{d}x$. Finalement, on obtient $\mathrm{d}x = \frac{2u}{u^2+1}\mathrm{d}u$

Astuce
Le but est de simplifier l'expression au maximum et l'exprimer le plus possible en fonction de u.

Remarque

Comme la fonction u est bijective, on aurait aussi pu calculer sa réciproque pour obtenir une nouvelle expression de x : $u = \sqrt{e^x - 1} \iff u^2 = e^x - 1 \iff u^2 + 1 = e^x \iff x = \ln(u^2+1)$. On peut ensuite exprimer directement $\mathrm{d}x = \frac{2u}{u^2+1}\mathrm{d}u$

On applique maintenant la fonction u × aux bornes de l'intégrale : On obtient $x = 0 \Rightarrow u(0) = 0, x = \ln(2) \Rightarrow u(\ln(2)) = 1$.

× **Difficulté**
et non sa réciproque !

On peut maintenant reécrire l'intégrale :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 u \times \frac{2u}{u^2+1}\mathrm{d}u \\
&= \int_0^1 \frac{2u^2}{u^2+1}\mathrm{d}u \\
&= 2\int_0^1 \frac{u^2-1+1}{u^2+1}\mathrm{d}u \\
&= 2\int_0^1 1 - \frac{1}{u^2+1}\mathrm{d}u \\
&= 2[u - \tan^{-1}(u)]_0^1 \\
&= 2 - \frac{2\pi}{4}
\end{aligned}$$

Exemple 2

Calculons :

$$\int \sin^5(x)\cos^3(x)\mathrm{d}x$$

On pose $u = \sin(x)$. Calculons maintenant $\mathrm{d}u$ pour en déduire $\mathrm{d}x$: $\mathrm{d}u = \cos(x)\mathrm{d}x \iff \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{\cos(x)}$.

Remarque

Comme la fonction u n'est pas bijective, on ne peut pas écrire de manière équivalente que $x = \arcsin(u)$

On peut maintenant reécrire l'intégrale :

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int \sin^5(x)\cos^3(x)\mathrm{d}x \\
&= \int u^5 \cos(x)^3 \frac{\mathrm{d}u}{\cos(x)} \\
&= \int u^5 \cos(x)^2 \mathrm{d}u \\
&= \int u^5 (1-\sin(x)^2)\mathrm{d}u \\
&= \int u^5 (1-u^2)\mathrm{d}u \\
&= \int u^5 - u^7 \mathrm{d}u \\
&= [\frac{u^6}{6} - \frac{u^8}{8}] = [\frac{\sin(x)^6}{6} - \frac{\sin(x)^8}{8}]
\end{aligned}
$$

1.1.5 Formulaire

Fonction	Primitive	Fonction	Primitive
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k$ si $n \neq -1$	$u' \cos u$	$\sin u + k$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + k$	$u' \sin u$	$-\cos u + k$
$\frac{a}{x}$	$a \ln x + k$	$\frac{u'}{u}$	$\ln u + k$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + k$	$u'\sqrt{u}$	$\frac{2}{3}(u)^{3/2} + k$
$\cos x$	$\sin x + k$	$u'e^u$	e^u
$\sin x$	$-\cos x + k$	$u' \cosh u$	$\sinh u$
e^x	$e^x + k$	$u' \sinh u$	$\cosh u$
$u'u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1} + k$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\cos^{-1}$
$\frac{u'}{u^n}$	$-\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{u^{n-1}} + k$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sin^{-1}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + k$	$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a}\tan^{-1}(\frac{x}{a})$

1.2 Techniques avancées

1.2.1 Linéarisation simple

On utilise les formules de linéarisation :

Théorème 2.1 : Formules de linéarisation

$$\cos(\theta)^2 = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$$

$$\sin(\theta)^2 = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$$

1.2.2 Linéarisation avancée

Théorème 2.2 : Formules d'Euler

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

On souhaite intégrer $\cos(x)\times\sin(2x)\times\cos(3x)$. Pour cela, on applique les formules d'Euler pour obtenir une somme de cosinus et de sinus que l'on peut intégrer sans problèmes :

> **Astuce**
> Dans le cas où les cosinus et sinus ont des puissances, on utilise le triangle de Pascal pour déterminer les coefficients du développement !

$$\begin{aligned}
f &= \cos(x)\times\sin(2x)\times\cos(3x)\\
&= \frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\times\frac{1}{2i}\left(e^{2ix}-e^{-2ix}\right)\times\frac{1}{2}\left(e^{3ix}+e^{-3ix}\right)\\
&= \frac{1}{8i}\left(e^{3ix}-e^{-ix}+e^{ix}-e^{-3ix}\right)\left(e^{3ix}+e^{-3ix}\right)\\
&= \frac{1}{8i}\left(e^{6ix}+e^{0}-e^{2ix}-e^{-4ix}+e^{4ix}+e^{-2ix}-e^{0}-e^{-6ix}\right)\\
&= \frac{1}{8i}\left(e^{6ix}-e^{-6ix}+e^{4ix}-e^{-4ix}-e^{2ix}+e^{-2ix}\right)\\
&= \frac{1}{8i}\left[2i\sin(6x)+2i\sin(4x)-2i\sin(2x)\right]\\
&= \frac{1}{4}\left[\sin(6x)+\sin(4x)-\sin(2x)\right]\\
F(x) &= \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{6}\cos(6x)-\frac{1}{4}\cos(4x)+\frac{1}{2}\cos(2x)\right]\\
&= \frac{1}{18}\left[-2\cos(6x)-3\cos(4x)+6\cos(2x)\right]
\end{aligned}$$

1.2.3 Décomposition en éléments simples

On cherche à obtenir une primitive de

$$f(x) = \frac{1}{x^2-x-2}$$

En factorisant le dénominateur, on reconnait une fraction rationnelle, il ne nous reste plus qu'à déterminer a et b :

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-2}$$

Calculons a en multipliant par $x+1$ deux 2 membres de l'égalité :

$$\frac{1}{x-2} = a + (x-1)\frac{b}{x-2}$$

Il nous suffit pour éliminer le membre avec b de donner à x une valeur qui annule $x+1$, c'est à dire -1. On obtient alors :

$$\frac{1}{(-1)-2} = \frac{1}{-3} = a$$

On procède de la même manière pour déterminer b. En multipliant par $x-2$ de 2 côtés et en donnant la valeur 2 à x, on trouve

$$\frac{1}{2+1} = \frac{1}{3} = b$$

Finalement, notre décomposition est :

$$f(x) = \frac{-1}{3(x+1)} + \frac{1}{3(x-2)}$$

Son intégrale vaut alors

$$\int f\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-2}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln(|\frac{x-2}{x+1}|)$$

1.2.4 Forme canonique

Théorème 2.3 : Forme canonique

La forme canonique d'une équation du second degré de la forme ax^2+bx+c est

$$a(x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$$

Cette forme permet d'utiliser la formule de arctan pour calculer des intégrales avec un polynôme du second degré en dénominateur.

On cherche l'intégrale de $f(x) = \frac{2x}{x^2+x+1}$. On aimerait décomposer cette fraction en éléments simples mais le polynôme du dénominateur n'admet pas de racines réelles.

On va donc ré-écrire le numérateur pour faire apparaitre la dérivée du dénominateur :

$$f(x) = \frac{2x+1-1}{x^2+x+1} = \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{x^2+x+1}$$

La première fraction étant de la forme u'/u, sa primitive est triviale. Pour la seconde, on va mettre le dénominateur sous forme canonique pour utiliser la dérivée d'arctan :

$$f(x) = \frac{2x+1-1}{x^2+x+1} = \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{(x+\frac{1}{2}^2)+\frac{3}{4}}$$

On applique la dernière formule de 4.1.5 avec $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ pour obtenir la primitive de la fonction :

$$F = \ln(x^2+x+1) - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}(x+1\frac{1}{2})})$$

1.2.5 Intégration par parties Tabulaire

En plus d'être plus rapide que la méthode classique quand elle est maîtrisée, cette façon de faire est aussi plus fiable et simples à mémoriser. Voir la fiche dédiée.