Chapitre 1

Équations différentielles

1.1 Premier ordre

On cherche la solution générale de l'équation

$$y'(x) - \alpha(x)y(x) = f(x)$$

. La solution est la somme de la solution de l'équation homogène associée et la solution particulière de cette équation.

1.1.1 Solution de l'équation homogène associée

Théorème 1.1 : Solution d'une EQD du premier ordre

La solution d'une équation de la forme $y'(x) - \alpha(x)y(x) = 0$ est

$$Ce^{\int^x \alpha(t)\mathrm{d}t}$$

1.1.2 Méthode de la variation de la constante

Théorème 1.2 : Solution particulière d'une EQD du premier ordre inhomogène

C'est

$$Ce^{\int^x \alpha(t)\mathrm{d}t}$$

avec

$$C(x) = \int^x f(y)e^{-\int^y \alpha(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}y$$

En pratique

On calcule d'abord $h(y) = -\int^y \alpha(t)\mathrm{d}t$ puis on injecte le résultat dans la solution $\int^x f(y)e^{h(y)}\mathrm{d}y$

1.2 Second ordre

On cherche à résoudre une équation de la forme

$$y''(x) - \alpha(x)y'(x) - \beta(x)y(x) = f(x)$$

1.2.1 Solution de l'équation homogène associée

Première solution

On cherche une première sokution "évidente", dont la forme sera donnée. Cette solution est notée $y_1(x)$.

Seconde solution

On a une équation de la forme

$$y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) = Ce^{\int^x \alpha(t)\mathrm{d}t}$$

avec $y_1(x), y_1'(x)$ qui sont connus et jouent le rôle des coefficients dans cette équation premier ordre que l'on peut résoudre par la section précédente.

Remarque

On peut aussi trouver $y_2(x)$ en calculant

$$y_2(x) = y_1(x) \int^x \frac{Ce^{\int^t \alpha(m)\mathrm{d}m}}{y_1^2}\mathrm{d}t$$

Conclusion

La solution générale est ainsi

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = y(x)$$

avec des constantes à déterminer avec les conditions initiales.

Solution particulière

Une solution particulière est de la forme

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

avec

Théorème 2.1 : Forme des coeffcients de l'EQD inhomogène du second ordre

$$c_1(x) = -\int^x \frac{f(t)y_2(t)}{Ce^{\int^t \alpha(m)\mathrm{d}m}}$$

$$c_2(x) = \int^x \frac{f(t)y_1(t)}{Ce^{\int^t \alpha(m)\mathrm{d}m}}$$

1.2.2 Conclusion

La solution de l'équation est donc $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+y_p(x)$

Remarque

L'expression $Ce^{\int^t \alpha(m)\mathrm{d}m}$ peut être notée $W(x)$ et se nomme le Wronskien. On le calcule en premier au début de la résolution pour s'en servir dans les étapes suivantes de la résolution.