Chapitre 2

Calcul intégral

2.1 Types de domaines

- Cercle de centre x_0, y_0 : $((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) = R^2$ ×
- Coque de centre x_0, y_0, z_0 : $((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2) = R^2$ ×
- Ensemble de cercles : $(((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) - R_0^2)(((x - x_1)^2 + (y - y_1)^2) - R_1^2) = 0$. Soit le point est sur le premier cercle, soit sur le second.
- Ellipse : $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 \leq 1$ avec a et b les rayons des demi-axes.

× **Difficulté**
Si à la place du =, on a un $\leq$, il s'agit d'un disque avec les mêmes paramètres. De plus, si on est dans l'espace et non plus dans le plan, la même équation décrit maintenant un cylindre.

× **Difficulté**
Si à la place du =, on a un $\leq$, il s'agit d'une boule avec les mêmes paramètres

2.1.1 En pratique

Pour trouver le domaine représenté par une inégalité, on remplace par une égalité, puis on trouve de quel “côté” on se trouve.

2.2 Aires et volumes

2.2.1 Systèmes de coordonnées

Coordonnées cartésiennes

- $S = \iint \mathrm{d}x\mathrm{d}y$
- $V = \iiint \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

Coordonnées cylindriques

- $S = \iint \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi$
- $V = \iint \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$

Coordonnées sphériques

- $V = \iiint r^2 \sin(\theta) \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi$

2.2.2 En pratique

Bornes de x	Bornes de y	Surface
a,b	f(x), f(y)	$S = \int_b^a g(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
f(x), g(x)	a,b	$S = \int_b^a g(y)\mathrm{d}y - \int_a^b f(y)\mathrm{d}y$

> **Symétrie sphérique**
>
> On regarde toujours la symétrie du domaine que l'on cherche à calculer. La manière de faire le calcul dépend de la forme du domaine et moins de la fonction.

2.3 Calcul intégral

2.3.1 Exemple de modiffaction de l'ordre d'intégration

Il faut d'abord trouver le domaine sur lequel il faut intégrer. Selon la première variable utilisée, il faudra séparer le domaine en plusieurs parties. On utilise l'exemple de la fonction $6x^2y$ avec $0 < y < x^2 < 1$

Analyse mathématique

Intégrons d'abord sur x. On a donc $x \in [\sqrt{y}, 1] \cup [-1, -\sqrt{y}], y \in [0, 1]$.

$$I = \int_0^1 \left(\int_{-1}^{-\sqrt{y}} 6x^2y \,\mathrm{d}x + \int_{\sqrt{y}}^1 6x^2y \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

Primitive par rapport à x : $\int 6x^2y \,\mathrm{d}x = 2x^3y$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{-\sqrt{y}} 6x^2y \,\mathrm{d}x &= [2x^3y]_{-1}^{-\sqrt{y}} = 2(-\sqrt{y})^3y - 2(-1)^3y \\
&= -2y^{3/2}y + 2y = 2y - 2y^{5/2} \\
\int_{\sqrt{y}}^1 6x^2y \,\mathrm{d}x &= [2x^3y]_{\sqrt{y}}^1 = 2(1)^3y - 2(\sqrt{y})^3y \\
&= 2y - 2y^{5/2}
\end{aligned}$$

Intégration par rapport à y :

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 ((2y - 2y^{5/2}) + (2y - 2y^{5/2}))\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 (4y - 4y^{5/2})\mathrm{d}y \\
&= \left[\frac{4y^2}{2} - \frac{4y^{7/2}}{7/2}\right]_0^1 \\
&= \left[2y^2 - \frac{8}{7}y^{7/2}\right]_0^1 \\
&= \left(2(1)^2 - \frac{8}{7}(1)\right) - 0 \\
&= 2 - \frac{8}{7} = \frac{14-8}{7} = \frac{6}{7}
\end{aligned}
$$

Intégrons maintenant en commençant par y.

$$
I = \int_{-1}^1 \left(\int_0^{x^2} 6x^2 y \,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x
$$

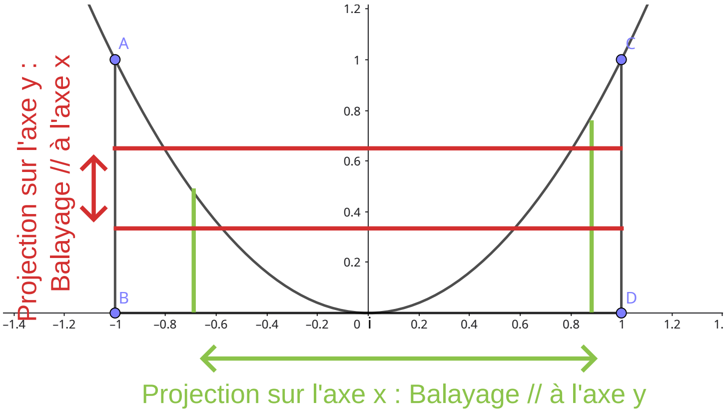
Intégrale intérieure par rapport à y :

$$
\begin{aligned}
\int_0^{x^2} 6x^2 y \,\mathrm{d}y &= 6x^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{x^2} \\
&= 3x^2((x^2)^2 - 0) \\
&= 3x^6
\end{aligned}
$$

Intégrale extérieure par rapport à x (on utilise la symétrie, $3x^6$ est paire) :

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^1 3x^6 \,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^1 3x^6 \,\mathrm{d}x \\
&= 6\int_0^1 x^6 \,\mathrm{d}x \\
&= 6\left[\frac{x^7}{7}\right]_0^1 \\
&= 6\left(\frac{1}{7} - 0\right) \\
&= \frac{6}{7}
\end{aligned}
$$

Analyse à partir du schéma



1. Ordre $\mathrm{d}y\mathrm{d}x$ (Intégration sur y en premier) On projette le domaine sur l'axe x, qui devient l'axe d'intégration extérieure. x varie de -1 à 1.

- **Pour un x fixé** ($x \in [-1, 1]$), le domaine est balayé verticalement (y) : la borne inférieure est toujours $y = 0$ et la borne supérieure est toujours $y = x^2$.
- **Conclusion** : Le domaine est **simple en** x. L'intégrale s'écrit en une seule partie :

$$I = \int_{-1}^{1} \left(\int_{0}^{x^2} f(x, y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

2. Ordre $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ (Intégration sur x en premier) On projette le domaine sur l'axe y, qui devient l'axe d'intégration extérieure. y varie de 0 à 1.

- **Pour un y fixé** ($y \in [0, 1]$), le domaine est balayé horizontalement (x). La droite horizontale $y = k$ coupe le domaine en deux points de la parabole, $x = \pm\sqrt{y}$.
- L'intervalle des x est séparé par un "trou" ou un point d'origine non inclus :

$$x \in [-1, -\sqrt{y}] \quad \text{ou} \quad x \in [\sqrt{y}, 1]$$

- **Conclusion** : Le domaine est **non simple en** y. Il est **impératif** de séparer l'intégrale intérieure en deux parties :

$$I = \int_{0}^{1} \left(\int_{-1}^{-\sqrt{y}} f(x, y)\, \mathrm{d}x + \int_{\sqrt{y}}^{1} f(x, y)\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

2.3.2 Intégration sur triangle

Analyse des bornes

L'expression des droites y pour les cotés AB et BC change à partir du point B, i.e. pour x = 1. On va donc séparer le triangle en 2 triangles rectangles.

Trouvons l'expression de la droite y pour le premier. C'est une droite, donc de la forme ax+b, avec a la pente et b l'ordonnée à l'origine. On sait que B=0 car A(0,0) et $a = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} = \frac{3}{1} = 3$ Donc $y = 3x$. De la même façon, pour le coté BC, on trouve $y = 4 - x$.

Calcul

Pour le premier triangle :

$$I_1 = \int_0^1 \int_0^{3x} (x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

Intégration par rapport à y :

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^{3x} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(x(3x) + \frac{(3x)^2}{2}\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(3x^2 + \frac{9x^2}{2}\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{15x^2}{2}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Intégration par rapport à x :

$$\begin{aligned}
&= \frac{15}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 \\
&= \frac{15}{2}\left(\frac{1}{3} - 0\right) = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

Pour le deuxième :

$$I_2 = \int_1^4 \int_0^{4-x} (x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

Intégration par rapport à y :

$$\begin{aligned}
&= \int_1^4 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^{4-x} \mathrm{d}x \\
&= \int_1^4 \left(x(4-x) + \frac{(4-x)^2}{2}\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_1^4 \left(4x - x^2 + \frac{16 - 8x + x^2}{2}\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_1^4 \frac{2(4x - x^2) + 16 - 8x + x^2}{2} \mathrm{d}x \\
&= \int_1^4 \frac{8x - 2x^2 + 16 - 8x + x^2}{2} \mathrm{d}x \\
&= \int_1^4 \frac{16 - x^2}{2}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Intégration par rapport à x :

$$\begin{aligned}
&= \left[8x - \frac{x^3}{6}\right]_1^4 \\
&= \left(8(4) - \frac{4^3}{6}\right) - \left(8(1) - \frac{1^3}{6}\right) \\
&= \left(32 - \frac{64}{6}\right) - \left(8 - \frac{1}{6}\right) \\
&= 24 - \frac{64}{6} + \frac{1}{6} = 24 - \frac{63}{6} \\
&= 24 - \frac{21}{2} = \frac{48-21}{2} = \frac{27}{2}
\end{aligned}$$

On trouve finalement que $I = 16$.

2.3.3 Avec P(x)<y<Q(x)

Quand les bornes de y sont des polynomes dépendant de x, il faut encore trouver les bornes de x, celles sur y étant déjà données.

Pour ce faire, on résout simplement $P(x) - Q(x) = 0$, les solutions (2 normalement) sont les bornes de x. Il n'y a alors plus qu'à intégrer.

Exemple avec le domaine $x^2+x \leq y \leq 3x+8$. En appliquant la méthode, on tombe sur une équation du second degré à résoudre pour trouver les bornes de x, ici -2 et 4.

2.4 Jacobien et changement de variable

2.4.1 Formules

Le Jacobien (J) est le facteur de correction pour l'élément de volume/-surface.

Cas 2 Variables ($\mathbb{R}^2$) : Intégrale Double

Pour une transformation $(x, y) = \mathbf{T}(u, v)$:

$$J(u, v) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

On peut alors écrire :

Proposition 4.1

$$J(u,v) = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}\right) - \left(\frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}\right)$$

Cas 3 Variables ($\mathbb{R}^3$) : Intégrale Triple

Pour une transformation $(x,y,z) = \mathbf{T}(u,v,w)$:

$$J(u,v,w) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$$

(Pour le calcul, utiliser la règle de Sarrus (voir fiche dédiée, dans la rubrique Outils Maths)

2.4.2 Application

Soit D le domaine d'intégration dans (x,y) et D' le domaine dans (u,v), et $f(x,y)$ la fonction à intégrer.

$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \iint_{D'} f(x(u,v), y(u,v)) \cdot |\mathbf{J}(\mathbf{u},\mathbf{v})|\, du\, dv$$

2.4.3 Exemple

Un exercice classique qui montre la puissance du Jacobien pour transformer une région non triviale (ici, une ellipse) en quelque chose de trivial.

Allons-y pour cette double application du Jacobien sur l'intégrale :

$$I = \iint_D (x^2 + y^2)\, dx\, dy$$

où le domaine D est défini par l'ellipse : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ $(a, b > 0)$.

Simplification du Domaine (Transformation 1)

L'objectif est de transformer l'ellipse D en un disque unité D'.

Nous posons la transformation $\mathbf{T}_1$:

$$\begin{cases} X = \frac{x}{a} \\ Y = \frac{y}{b} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x = aX \\ y = bY \end{cases}$$

Le domaine D devient D' dans les coordonnées (X, Y) :

$$\frac{(aX)^2}{a^2} + \frac{(bY)^2}{b^2} \leq 1 \implies X^2 + Y^2 \leq 1$$

D' est maintenant un disque unité.

On calcule ensuite le Jacobien de la transformation inverse $(x, y) \to (X, Y)$:

$$J_1(X, Y) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = a \cdot b - 0$$

$$|\mathbf{J_1}| = ab \quad \text{(puisque } a, b > 0)$$

L'élément différentiel devient : $dx\, dy = ab\, dX\, dY$.

On remplace dans l'intégrale I :

$$I = \iint_{D'} ((aX)^2 + (bY)^2) \cdot ab\, dX\, dY$$

$$I = ab \iint_{D'} (a^2X^2 + b^2Y^2)\, dX\, dY$$

où D' est le disque $X^2 + Y^2 \leq 1$.

Passage aux Coordonnées Polaires (Transformation 2)

L'intégrale est maintenant sur un disque, ce qui signifie que l'on peut utiliser les coordonnées Polaires.

Nous posons la transformation $\mathbf{T}_2$ sur les variables (X, Y) :

$$\begin{cases} X = \rho \cos \phi \\ Y = \rho \sin \phi \end{cases}$$

Le domaine D' (le disque unité $X^2 + Y^2 \leq 1$) devient le domaine D'' dans (ρ, ϕ) :

$$\begin{cases} \rho^2 \leq 1 \implies 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi \end{cases}$$

Calculons maintenant le Jacobien. C'est le Jacobien standard des coordonnées polaires (appliqué à $X, Y \to \rho, \phi$) :

$$J_2(\rho, \phi) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial \rho} & \frac{\partial X}{\partial \phi} \\ \frac{\partial Y}{\partial \rho} & \frac{\partial Y}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos \phi & -\rho \sin \phi \\ \sin \phi & \rho \cos \phi \end{pmatrix} = \rho \cos^2 \phi + \rho \sin^2 \phi = \rho$$

$$|\mathbf{J_2}| = \rho \quad \text{(puisque } \rho \geq 0)$$

L'élément différentiel devient : $dX\, dY = \rho\, d\rho\, d\phi$.

On reprend l'intégrale après T1 et on substitue :

$$I = ab \iint_{D'} (a^2 X^2 + b^2 Y^2)\, dX\, dY$$

$$I = ab \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 \left(a^2(\rho \cos\phi)^2 + b^2(\rho \sin\phi)^2 \right) \cdot \rho\, d\rho \right] d\phi$$

Simplifions l'intégrande :

$$I = ab \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 \rho^2 (a^2 \cos^2\phi + b^2 \sin^2\phi) \cdot \rho\, d\rho \right] d\phi$$

$$I = ab \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2\phi + b^2 \sin^2\phi) \left[\int_0^1 \rho^3\, d\rho \right] d\phi$$

Trivialement, on a :

$$\int_0^1 \rho^3\, d\rho = \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

Pour ϕ :

$$I = ab \cdot \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2\phi + b^2 \sin^2\phi)\, d\phi$$

On utilise l'identité $\int_0^{2\pi} \cos^2\phi\, d\phi = \int_0^{2\pi} \sin^2\phi\, d\phi = \pi$.

$$I = \frac{ab}{4} \left(a^2 \int_0^{2\pi} \cos^2\phi\, d\phi + b^2 \int_0^{2\pi} \sin^2\phi\, d\phi \right)$$

$$I = \frac{ab}{4} (a^2 \pi + b^2 \pi)$$

Le résultat final est donc :

$$I = \frac{\pi ab (a^2 + b^2)}{4}$$