3

Chapitre

Calcul vectoriel

3.1 Flux d'un champ de vecteur

Définition 1.1 : Flux d'un champ de vecteur

$$\iint_S \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_S \mathrm{d}S \vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{n}$$

3.2 Gradient

Définition 2.1 : Gradient

$$\nabla f = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e_z}$$

Théorème 2.1 : Plan tangent à une surface

L'équation est, avec un point M_0 appartenant à la surface :

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

Théorème 2.2 : Plan tangent à une surface de la forme $z = h(x, y)$

$$z = z_0 + (x - x_0)\frac{\partial}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Théorème 2.3 : Condition de conservation

En écrivant $\overrightarrow{F} = P\overrightarrow{e_x} + Q\overrightarrow{e_y}$: Pour un champ 2D : $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

Pour un champ 3D : $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial Q}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$

3.3 Autres

Définition 3.1 : Rotationnel

$$rot(\overrightarrow{F}) = (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}), (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}), (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})$$

Théorème 3.1 : Formule de Green

$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{r} = \iint_S \mathrm{d}x\mathrm{d}y(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})$$

Définition 3.2 : Divergent

$$dif(\overrightarrow{F})(x, y, z) = \frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z)$$

3.4 Méthode

3.4.1 Calculer le flux d'un champ de vecteur

On cherche à calculer le flux de $\overrightarrow{F}(x,y,z) = \frac{1}{1+(z/l)^2}(x\overrightarrow{e}_x + y\overrightarrow{e}_y + z\overrightarrow{e}_z)$ à travers la surface latérale $\mathcal{S}$ du cylindre infini d'axe $(O, \overrightarrow{e}_z)$ et de rayon R.

Élément de surface orienté ($d\overrightarrow{S}$)

Sur le cylindre de rayon R, $\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \overrightarrow{e}_\rho\,\mathrm{d}S = \overrightarrow{e}_\rho\,R\,\mathrm{d}\varphi\,dz$.

Produit scalaire

$$\overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \frac{1}{1+(z/l)^2}(x\overrightarrow{e}_x + y\overrightarrow{e}_y + z\overrightarrow{e}_z)\cdot\overrightarrow{e}_\rho\,R\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$$

En coordonnées cylindriques, $x\overrightarrow{e}_x + y\overrightarrow{e}_y = \rho\overrightarrow{e}_\rho$.

Sur le cylindre, $\rho = R$.

On en déduit

$$(x\overrightarrow{e}_x + y\overrightarrow{e}_y + z\overrightarrow{e}_z) = R\overrightarrow{e}_\rho + z\overrightarrow{e}_z$$

Le produit scalaire donne

$$(R\overrightarrow{e}_\rho + z\overrightarrow{e}_z)\cdot\overrightarrow{e}_\rho = R(\overrightarrow{e}_\rho\cdot\overrightarrow{e}_\rho) + z(\overrightarrow{e}_z\cdot\overrightarrow{e}_\rho) = R$$

$$\overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \frac{R}{1+(z/l)^2}\,R\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z = \frac{R^2}{1+(z/l)^2}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$$

Calcul du flux

L'intégration se fait sur $z \in]-\infty, +\infty[$ et $\varphi \in [0, 2\pi]$.

$$\Phi = R^2\int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+(z/l)^2}\,dz$$

$$\Phi = 2\pi R^2\cdot(l[\arctan(z/l)]_{-\infty}^{+\infty}) = 2\pi R^2\cdot(l(\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}))) = 2\pi^2 lR^2$$

3.4.2 Calculer un plan tangent

Plan Tangent à $z = f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ au point $(1, 2, 7)$

L'équation du plan tangent à la surface $z = f(x, y)$ au point (x_0, y_0, z_0) est donnée par :

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

A. Calcul des dérivées partielles de $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y, \frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y$$

B. Évaluation au point $M_0 = (1, 2, 7)$

On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 2(1) + 2 = 4, \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 1 + 2(2) = 5$$

C. Équation du plan tangent

En substituant les valeurs dans l'équation du plan, on obtient :

$$\begin{aligned} z - 7 &= 4(x - 1) + 5(y - 2) \\ z - 7 &= 4x - 4 + 5y - 10 \\ 4x + 5y - z &= 4 + 10 - 7 \\ 4x + 5y - z &= 7 \end{aligned}$$

Plan Tangent à la surface implicite $f(x, y, z) = 0$ au point $M_0 = (1, 1, 1)$

Ici, l'équation du plan tangent est donnée par :

$$\overrightarrow{\nabla} f(M_0) \cdot (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_0) = 0$$

soit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(M_0)(z - z_0) = 0$$

La fonction est $f(x, y, z) = 2x^3 - 3x^2 + y^2 z + yz^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{4}{3}$.

A. Calcul des dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 - 6x, \frac{\partial f}{\partial y} = 2yz + z^2, \frac{\partial f}{\partial z} = y^2 + 2yz + z^2$$

B. Évaluation au point $M_0 = (1,1,1)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1) = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1) = 3, \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1) = 4$$

Le vecteur normal est donc $\vec{\nabla} f(1,1,1) = (0,3,4)$.

C. Équation du plan tangent

Avec $x_0 = 1, y_0 = 1, z_0 = 1$:

$$\begin{aligned} 0(x-1) + 3(y-1) + 4(z-1) &= 0 \\ 3y - 3 + 4z - 4 &= 0 \\ 3y + 4z &= 7 \end{aligned}$$

3.4.3 Déterminer le potentiel d'un champ de vecteurs conservatif

Champ de Vecteurs 2D : $\vec{F}(x,y) = (y - 3x^2)\vec{e}_x + (x + \sin(y))\vec{e}_y$

Un champ de vecteurs $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{e}_x + Q(x,y)\vec{e}_y$ défini sur le domaine simplement connexe $\mathbb{R}^2$ est conservatif (ou est un champ de gradient) si la condition de Schwarz est vérifiée :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Ici, $P(x,y) = y - 3x^2$ et $Q(x,y) = x + \sin(y)$, et

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(y - 3x^2) = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x + \sin(y))$$

Puisque $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 1$, le champ $\vec{F}$ est bien conservatif sur $\mathbb{R}^2$. On peut déterminer son potentiel :

Nous cherchons une fonction scalaire $f(x,y)$ telle que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= P(x,y) = y - 3x^2 \quad \textbf{(1)} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= Q(x,y) = x + \sin(y) \quad \textbf{(2)} \end{aligned}$$

1. Intégration de (1) par rapport à x :

$$f(x,y) = \int (y - 3x^2)dx = yx - x^3 + C_1(y)$$

où $C_1(y)$ est une fonction arbitraire dépendant uniquement de y.

2. Dérivation par rapport à y et identification avec (2) : Nous dérivons le résultat obtenu par rapport à y :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(yx - x^3 + C_1(y)) = x + C_1'(y)$$

En comparant avec l'équation $(\mathbf{2})$ $(\frac{\partial f}{\partial y} = x + \sin(y))$:

$$x + C_1'(y) = x + \sin(y)$$
$$C_1'(y) = \sin(y)$$

3. Intégration de $C_1'(y)$ pour trouver $C_1(y)$:

$$C_1(y) = \int \sin(y)dy = -\cos(y) + C$$

où C est une constante réelle.

4. Conclusion : En substituant $C_1(y)$ dans l'expression de $f(x, y)$ on trouve l'expression finale de f :

$$f(x, y) = yx - x^3 - \cos(y) + C$$

Champ de Vecteurs 3D : $\overrightarrow{F}(x, y, z) = y^2\overrightarrow{e}_x + (2xy + z)\overrightarrow{e}_y + (y + 3)\overrightarrow{e}_z$

Un champ de vecteurs $\overrightarrow{F}(x, y, z) = P\overrightarrow{e}_x + Q\overrightarrow{e}_y + R\overrightarrow{e}_z$ est conservatif sur $\mathbb{R}^3$ si son rotationnel est nul : $\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$. Les trois conditions à vérifier sont :

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Ici, $P = y^2$, $Q = 2xy + z$, $R = y + 3$.

On a bien :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(y+3) &&= 1 = \frac{\partial}{\partial z}(2xy+z) &&= \frac{\partial Q}{\partial z} \\
\frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}(y^2) &&= 0 = \frac{\partial}{\partial x}(y+3) &&= \frac{\partial R}{\partial x} \\
\frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(2xy+z) &&= 2y = \frac{\partial}{\partial y}(y^2) &&= \frac{\partial P}{\partial y}
\end{aligned}$$

Le champ $\overrightarrow{F}$ est bien conservatif sur $\mathbb{R}^3$.

On peut donc déterminer le potentiel f tel que $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{\nabla} f$

Nous cherchons $f(x, y, z)$ telle que :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 \quad (\mathbf{1})$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + z \quad (\mathbf{2})$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = y + 3 \quad (\mathbf{3})$$

1. Intégration de (1) par rapport à x :

$$f(x,y,z)=\int y^2dx=y^2x+C_1(y,z)$$

2. Dérivation par rapport à y et identification avec (2) :

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(y^2x+C_1(y,z))=2yx+\frac{\partial C_1}{\partial y}$$

En comparant avec $(\mathbf{2})$ ($\frac{\partial f}{\partial y}=2xy+z$) :

$$2yx+\frac{\partial C_1}{\partial y}=2xy+z \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial C_1}{\partial y}=z$$

3. Intégration de $\frac{\partial C_1}{\partial y}$ par rapport à y :

$$C_1(y,z)=\int zdy=zy+C_2(z)$$

où $C_2(z)$ est une fonction arbitraire dépendant uniquement de z. Donc, $f(x,y,z)=y^2x+zy+C_2(z)$.

4. Dérivation par rapport à z et identification avec (3) :

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}(y^2x+zy+C_2(z))=y+C_2'(z)$$

En comparant avec $(\mathbf{3})$ ($\frac{\partial f}{\partial z}=y+3$) :

$$y+C_2'(z)=y+3 \quad\Rightarrow\quad C_2'(z)=3$$

5. Intégration de $C_2'(z)$ pour trouver $C_2(z)$:

$$C_2(z)=\int 3dz=3z+C$$

où C est une constante réelle.

6. Conclusion : En substituant $C_2(z)$ dans l'expression de $f(x,y,z)$, on trouve :

$$f(x,y,z)=xy^2+yz+3z+C$$

3.4.4 Utiliser la formule de Green

Le champ est $\overrightarrow{F}(x,y)=P\overrightarrow{e}_x+Q\overrightarrow{e}_y$ avec $P(x,y)=-y^3$ et $Q(x,y)=2$. La courbe C est le cercle $x^2+y^2=4$ (rayon $R=2$). $\mathcal{R}$ est le disque $x^2+y^2\leq 4$.

Calcul direct

On calcule d'abord circulation $\int_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}$

Paramétrisation de C :

$$x=2\cos t,\quad y=2\sin t,\quad 0\leq t\leq 2\pi$$

$$dx = -2\sin t\mathrm{d}t, \quad dy = 2\cos t\mathrm{d}t$$

Intégrale :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} &= \int_0^{2\pi} [Pdx + Qdy] \\
&= \int_0^{2\pi} [(-y^3)(-2\sin t) + (2)(2\cos t)]\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} [-(2\sin t)^3(-2\sin t) + 4\cos t]\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} [16\sin^4 t + 4\cos t]\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

L'intégrale de $4\cos t$ sur $[0, 2\pi]$ est nulle. Pour $\sin^4 t$, on utilise l'identité $\int_0^{2\pi} \sin^4 t\mathrm{d}t = \frac{3\pi}{4}$.

$$\int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 16 \cdot \frac{3\pi}{4} + 0 = 12\pi$$

Utilisation de Green

On calcule l'intégrale double $\iint_{\mathcal{R}} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$

Rotationnel 2D :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(2) = 0 \\
\frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(-y^3) = -3y^2 \\
\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= 0 - (-3y^2) = 3y^2
\end{aligned}$$

Intégrale double (en coordonnées polaires) : $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $\mathrm{d}A = \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi$. On a

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{R}} 3y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 3(\rho\sin\varphi)^2 \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi \\
&= 3\left(\int_0^2 \rho^3\mathrm{d}\rho\right)\left(\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi\right) \\
&= 3 \cdot \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^2 \cdot [\pi] \\
&= 3 \cdot \left(\frac{16}{4}\right) \cdot \pi = 3 \cdot 4 \cdot \pi = 12\pi
\end{aligned}$$

On trouve bien le même résultat avec les 2 méthodes.