

1. Introduction

1.1. Objectifs

Nous souhaitons étudier le phénomène de résonnance dans des systèmes oscillants. Nous nous appuyons sur une étude électrocinétique, en particulier un circuit RLC série en régime sinusoïdal en régime forcé. Ce type de circuit nous permet d'étudier une résonnance en charge (par l'analyse de la tension aux bornes du condensateur) ou en intensité (par l'analyse de la tension aux bornes de la résistance).

1.2. Sommaire

Ce TP se décompose en quatre parties :

1. Analyse qualitative de la tension aux bornes de la résistance
2. Étude de la résonnance en intensité
3. Analyse qualitative de la tension aux bornes du condensateur
4. Étude de la résonnance en charge

2. Protocole

Dans toute ce TP, nous paramétrons le générateur pour fournir un signal sinusoïdal d'amplitude 2.0 V crête à crête.

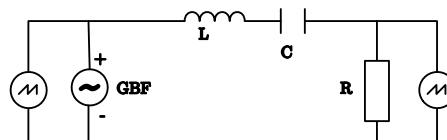
2.1. Analyse qualitative de la tension aux bornes de la résistance & Étude de la résonnance en intensité

2.1.1. Matériel

- Bobine Leybold de 36mH, 9.5 Ω et 1000 spires
- Générateur Basse Fréquence délivrant un signal sinusoïdal
- Résistance de 5 ω
- Un oscilloscope comportant 2 canaux
- Câbles

2.1.2. Description du montage expérimental

Nous réalisons le montage indiqué en figure 1. Par convention, on associe la mesure de la tension du générateur au canal 1 et celle de la résistance au canal 2.



2.1.3. Mesures à effectuer

Étude qualitative

Pour une fréquence proche de la fréquence de résonnance, une fréquence haute et une basse fréquence :

1. Relever l'amplitude tension du générateur et celle de la résistance
2. Relever la phase de tension du générateur et celle de la résistance

Mesure de la fréquence de résonnance

1. Paramétrer le générateur sur la fréquence de résonnance théorique
2. Paramétrer l'oscilloscope sur le mode XY Display
3. Modifier la fréquence du générateur pour que l'ellipse affichée devienne une droite et relever la valeur de fréquence

Mesures des valeurs du diagramme de Bode

Le diagramme de Bode synthétise les informations sur l'amplitude des tensions et sur le déphasage.

1. Se placer sur le mode par défaut de l'oscillateur
2. Pour 6 valeurs (par pas de 10 Hz environ) de fréquence au-dessus de la fréquence de résonnance, relever la tension du générateur et de la résistance
3. Pour 6 valeurs (par pas de 10 Hz environ) de fréquence au-dessous de la fréquence de résonnance, relever la tension du générateur et de la résistance
4. Pour 6 valeurs de fréquence autour de la fréquence de résonnance, relever le déphasage.

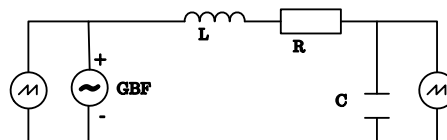
2.2. Analyse de la tension aux bornes du condensateur & Étude de la résonnance en charge

2.2.1. Matériel

- Bobine Leybold de 36mH, 9.5 ω et 1000 spires
- Générateur Basse Fréquence délivrant un signal sinusoïdal
- Résistance de 5 ω et de 50 ω
- Un oscilloscope comportant 2 canaux
- Câbles

2.2.2. Description du montage expérimental

Nous réalisons le montage indiqué en figure 2. Par convention, on associe la mesure de la tension du générateur au canal 1 et celle de la résistance au canal 2.



2.2.3. Mesures à effectuer

Étude qualitative

Pour une fréquence proche de la fréquence de résonnance, une fréquence haute et une basse fréquence :

1. Relever l'amplitude tension du générateur et celle du condensater
2. Relever la phase de tension du générateur et celle du condensater

Mesures de l'amplitude

1. Se placer sur le mode par défaut de l'oscillateur
2. Pour 6 valeurs (par pas de 10 Hz environ) de fréquence au-dessus de la fréquence de résonnnace, relever la tension du générateur et de la résistance
3. Pour 6 valeurs (par pas de 10 Hz environ) de fréquence au-dessous de la fréquence de résonnnace, relever la tension du générateur et de la résistance
4. Recommencer les 2 étapes précédentes avec une résistance de 50 ω

3. Mesures

3.1. Analyse qualitative de la tension aux bornes de la résistance & Étude de la résonnance en intensité

3.1.1. Analyse qualitative

Fréquence	Basse	Résonnnance	Haute
Tension du générateur (V)	1,972	1,972	1,972
Tension de la résistance	très faible $\simeq 100\mu V$	la plus haute $\simeq 600mV$	très faible $\simeq 100\mu V$
Déphasage	$-\frac{\pi}{2}$	0	$+\frac{\pi}{2}$

3.1.2. Analyse quantitative

Données

Fréquence (Hz)	Tension du générateur (Ue) (V)	Tension de la résistance (Ur) (mV)
100	1,972	1,19
269	1,972	14
426	1,992	23
578	1,992	33
730	1,992	37
1140	1,972	339
1150	1,972	386
1160	1,952	434
1170	1,932	515
1180	1,932	575
1190	1,932	630
1200	1,932	640
1211	1,932	611
1221	1,932	548
1231	1,932	487
1241	1,932	424
1251	1,952	378
1261	1,972	334
1271	1,972	301
1794	1,992	36,2
1947	1,992	38,5
2100	1,992	31,0
5418	1,992	10,4

Fréquence (Hz)	Décalage (rad)
1050	-1,57 ($-\frac{\pi}{2}$)
1146	-0,785 ($-\frac{\pi}{4}$)
1197	0
1237	0,785 ($\frac{\pi}{4}$)
1389	1,57 ($\frac{\pi}{2}$)

Fréquence de résonance	Fréquence Haute	Fréquence Basse
1199	1997	1200

Incertitudes

L'incertitude liée aux valeurs d'amplitude obtenues est liée à la précision des appareils de mesures. On a donc :

$$u(U_r) = \frac{1}{\sqrt{3}} mV, u(U_e) = \frac{0.001}{\sqrt{3}} V, u(f) = \frac{1}{\sqrt{3}} Hz$$

Celle sur le déphasage est elle aussi liée à la précision de l'appareil de mesure, ici l'échelle horizontale et de sa graduation utilisée par l'oscilloscope. C'est pourquoi nous avons plutôt chercher à obtenir des valeurs de fréquence pour lesquelles les décalages entre courbes sont faciles à lire, c'est à dire des décalages multiples de $\frac{\pi}{4}$. De cette façon, il est plus facile de vérifier si les courbes sont en quadrature de phase ou en opposition de phase et de relever la valeur de fréquence associée. L'incertitude liée au décalage de phase est dès lors considérée comme négligeable devant celle liée à la fréquence. On a donc :

$$u(f) = \frac{1}{\sqrt{3}} Hz$$

L'incertitude liée à la fréquence de résonance est liée à l'échelle utilisée par l'oscilloscope pour afficher l'ellipse. Pour l'évaluer correctement, nous mesurer la fréquence la plus haute et la plus basse pour lesquelles on peut considérer l'ellipse comme une droite. On obtient alors

$$f_r = (1199 \pm 1.5) Hz$$

3.2. Analyse de la tension aux bornes du condensateur & Étude de la résonance en charge

3.2.1. Données

3.2.2. Analyse qualitative

Fréquence	Basse	Résonnnance	Haute
Tension du générateur (V)	1,972	1,972	1,972
Tension du condensateur (V)	$\simeq 2$	la plus haute $\simeq 34$	très faible $\simeq 400\mu V$
Déphasage	0	$-\frac{\pi}{4}$	$-\pi$

3.2.3. Analyse quantitative

Fréquence	Tension du générateur (Ve) (V)	Tension du condensateur (Vs) (V)
1130	2.0	17
1146	2.0	20,6
1156	2.0	24
1166	2.0	27
1176	2.0	31
1186	2.0	33
1196	2.0	36
1206	2.0	34
1216	2.0	31
1226	2.0	27
1236	2.0	24

Fréquence (Hz)	Tension du générateur (Ve) (V)	Tension du condensateur (Vs) (V)
13	2,3	0,690
824	2,3	4,32
880	2,3	4,82
925	2,3	5,50
981	2,3	6,50
1020	2,3	7,34
1072	2,3	8,65
1100	2,3	9,41
1120	2,3	9,99
1180	2,3	10,3
1220	2,3	9,47
1232	2,3	9,50
1246	2,3	8,81
1350	2,3	5,60
1400	2,3	4,65
1450	2,3	4,00

3.2.4. Incertitude

Les incertitudes sont les mêmes que pour la partie précédente.

4. Graphiques

4.1. Analyse de la tension aux bornes de la résistance & Étude de la résonance en intensité

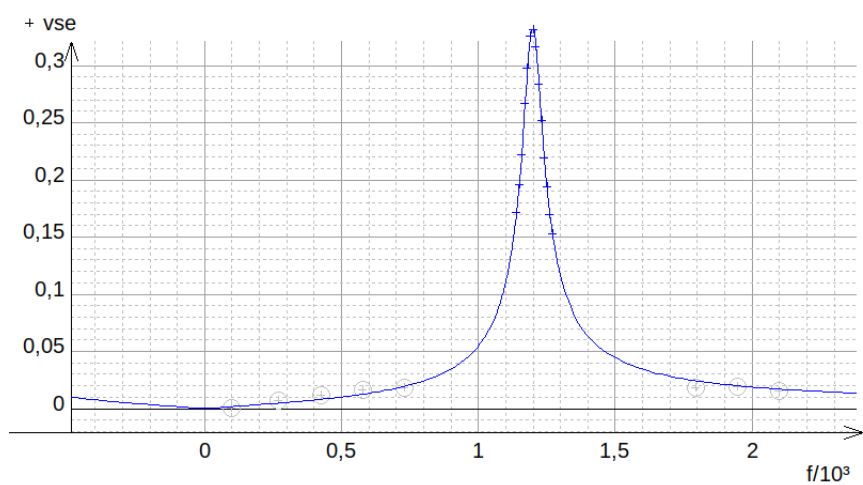


FIGURE 1 – Diagramme de Bode en amplitude

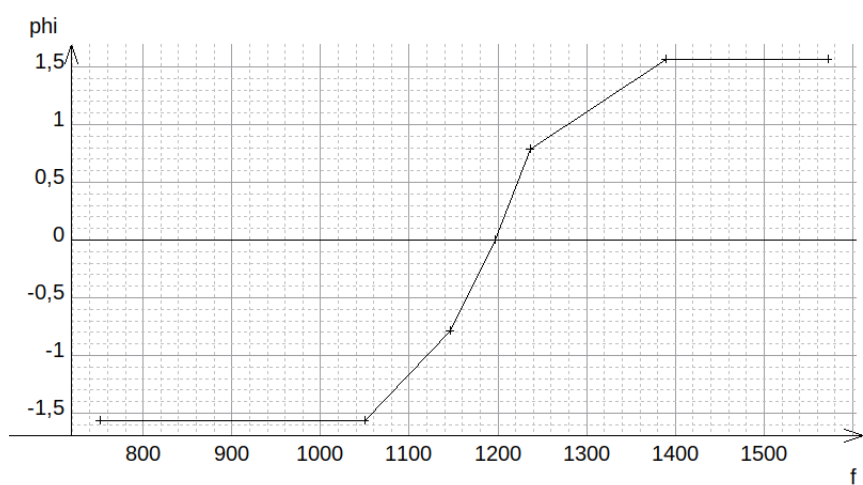


FIGURE 2 – Diagramme de Bode en déphasage pour $\Delta\phi = \phi_e - \phi_r$

4.2. Analyse de la tension aux bornes du condensateur & Étude de la résonance en charge

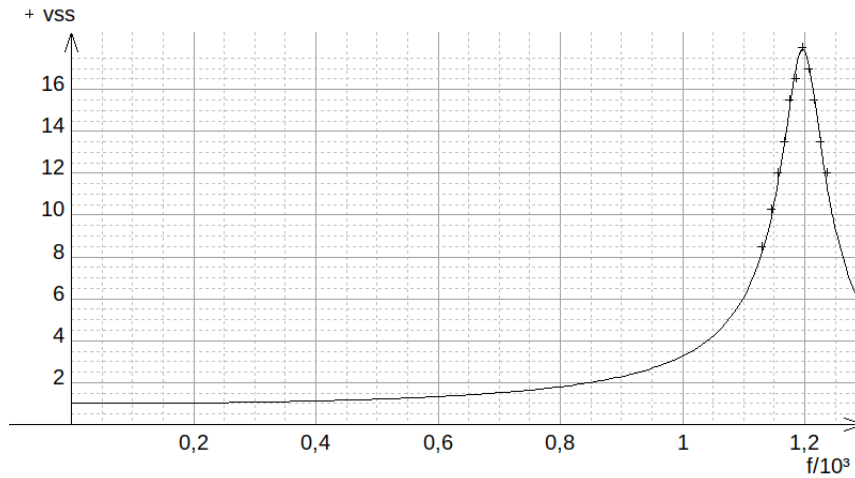


FIGURE 3 – Diagramme de Bode en amplitude pour $R = 5\Omega$

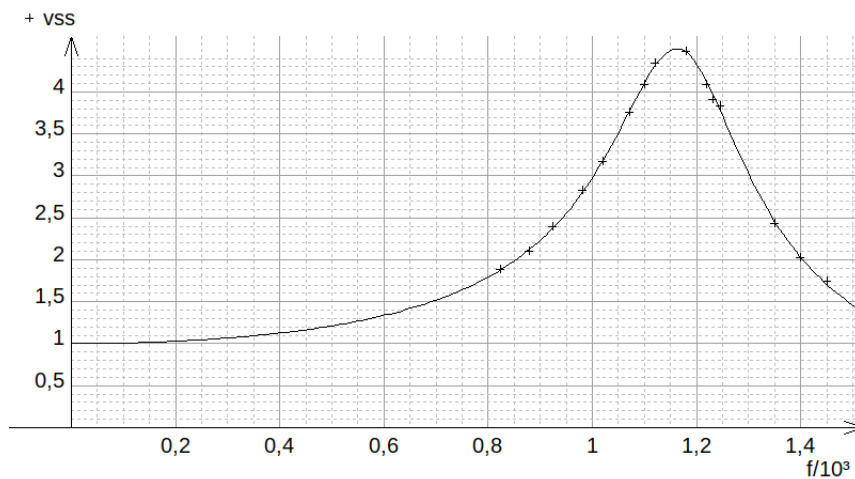


FIGURE 4 – Diagramme de Bode en amplitude pour $R = 50\Omega$

5. Exploitation des résultats

5.1. Analyse de la tension aux bornes de la résistance & Étude de la résonance en intensité

5.1.1. Analyse qualitative

La fonction de transfert $H_c = \frac{U_r}{U_e}$ est donnée par :

$$H_c(\omega) = \frac{R}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} \quad (1)$$

et

$$\tan(\varphi) = \frac{-(L\omega - \frac{1}{C\omega})}{R} \quad (2)$$

On peut calculer le déphasage et l'amplitude de U_r selon les valeurs de fréquence :

— **Basse Fréquence** ($\omega \rightarrow 0$) : Le module $|H_c| \rightarrow 0$. $\underline{U_r}$ est très faible et le déphasage tend vers $+\frac{\pi}{2}$.

- **Haute Fréquence** ($\omega \rightarrow \infty$) : Le module $|H_c| \rightarrow 0$. \underline{U}_r est très faible et le déphasage tend vers $-\frac{\pi}{2}$.
- **Résonance** ($\omega = \omega_0$) : L'impédance est minimale lorsque $L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0}$, soit $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. $|H_c| = \frac{R}{R_{tot}}$ est maximal. Le déphasage est nul.

Les prédictions correspondent bien aux observations. En effet, pour le déphasage, nous avons relevé la valeur de $\Delta\phi = \phi_e - \phi_r$, alors que les valeurs de déphasage calculées correspondent à $\Delta\phi = \phi_r - \phi_e$, soit l'opposé. Il est donc normal qu'on trouve les valeurs prédites, mais au signe près. Il s'agit du comportement d'un filtre passe-bande.

5.1.2. Analyse quantitative

Le but est de déterminer expérimentalement les valeurs du facteur de qualité et de la fréquence de résonance. Avec EQ1, On sait que

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (3)$$

et

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}2\pi} \quad (4)$$

Avec EQ 1, on sait que

$$\frac{V_s}{V_e} = (1 + Q^2(\frac{f}{f_r} - \frac{f_r}{f})^2)^{-1/2} \quad (5)$$

En traçant $\frac{V_s}{V_e}$ en fonction de la fréquence, on peut déduire ces 2 paramètres. Avec Regressi, on obtient¹ :

$$Q = (16,56 \pm 0,17), f_r = (1,19853 \pm 0,00024) \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

Les valeurs obtenues sont assez proche des valeurs théoriques calculées :

$$Q = 18.5, f_r = 1186$$

La valeur de fréquence de résonance la plus proche est celle obtenue avec la méthode par regression, bien que la seconde méthode soit plus rapide à mettre en oeuvre et produise tout de même un résultat similaire.

La différence de facteur de qualité peut s'expliquer par la résistance des fils, et résistances internes du générateur et des appareils de mesure que nous avons négligés. Comme les résistances utilisées sont faibles $\simeq 10\Omega$, ces dernières peuvent ne plus être négligées. Le diagramme de Bode en déphasage est également celui attendu et prédit par l'analyse qualitative.

5.2. Analyse de la tension aux bornes du condensateur & Étude de la résonance en charge

5.2.1. Analyse qualitative

On déduit de la fonction de transfert l'amplitude :

$$|H_c(f)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{f^2}{f_0^2}\right)^2 + \left(\frac{f}{f_0 Q}\right)^2}} \quad (6)$$

On déduit de la fonction de transfert son argument :

$$\phi(f) = -\text{Arg}(Z)$$

Pour un nombre complexe $Z = X + jY$, l'argument est $\text{Arg}(Z) = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right)$. Ici, $X = 1 - \frac{f^2}{f_0^2}$ et $Y = \frac{f}{f_0 Q}$.

Donc, le déphasage $\phi(f)$ est :

$$\phi(f) = -\arctan\left(\frac{\frac{1}{Q} \frac{f}{f_0}}{1 - \left(\frac{f}{f_0}\right)^2}\right)$$

On peut calculer le déphasage et l'amplitude de U_r selon les valeurs de fréquence :

- **Basse Fréquence** ($f \rightarrow 0$) : Le module $|H_c| \rightarrow 1$. $|U_r| = |E|$. De plus, $\phi(f) \rightarrow -\arctan(0) = 0$, donc le déphasage est nul.

1. Nous avons dû rajouter un coefficient multiplicateur à l'expression utilisée pour obtenir une modélisation plus proche des données.

- **Haute Fréquence** ($f \rightarrow \infty$) : Le module $|H_c| \rightarrow 0$. $|U_r|$ est très faible. Pour l'argument, celui-ci doit tendre vers $-\pi$
- **Résonance** ($f = f_0$) : $|H_c| = Q$. On en déduit que $|v_s| = Q \cdot |v_e|$. De plus, $\phi(f_0) = -\arctan(\infty) = -\frac{\pi}{2}$

Calcul de l'argument à haute fréquence :

Pour un grand f , $Y/X \approx \frac{f/(f_0 Q)}{-f^2/f_0^2} = -\frac{f_0}{fQ} \rightarrow 0^-$.

L'argument de l'arctangente est négatif et très petit, mais comme $f/f_0 > 1$, la fonction est définie par $Y/(|X|)$ avec une correction de π pour l'argument de Z . Or, $\text{Arg}(Z) = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right)$ se trouve dans le deuxième quadrant (Réel $X < 0$, Imaginaire $Y > 0$), donc $\text{Arg}(Z) \rightarrow \pi$.

Donc

$$\phi(f) \rightarrow -\pi$$

Les prédictions correspondent bien aux observations.

5.2.2. Analyse quantitative

On sait que

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{1}{1 - \frac{f^2}{f_0^2} + j \frac{f}{f_0 Q}} \quad (7)$$

On peut donc déduire Q et f_0 des mesures effectuées.

On sait aussi que $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$. De plus, l'expression du facteur de qualité est

$$Q = \frac{\sqrt{LC}}{RC}$$

R = 5 Ω

Dans le cas où on choisit $R = 5\Omega$, le facteur de qualité obtenu sera très grand et $f_0 \simeq f_r$. Avec Regressi, on obtient $f_0 = (1,19738 \pm 0,00068) \cdot 10^3$ Hz, $Q = (17,90 \pm 0,18)$, ce qui est cohérent avec les valeurs théoriques ($Q = 18,50$, $f_0 = f_r = 1186$ Hz).

R = 50 Ω

Avec $R = 50\Omega$, on ne peut plus négliger le terme $\frac{1}{2Q^2}$ et on a bien $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$.

Regressi donne $f_0 = (1,17657 \pm 0,00094) \cdot 10^3$ Hz, $Q = (4,483 \pm 0,044)$, ce qui correspond aux valeurs prévues : $f_r = 1175$ Hz, $Q = 4.50$

On remarque que plus la résistance est élevée, plus le facteur de qualité est faible, et donc moins le phénomène de résonance sera important.

6. Conclusion

Les analyses qualitatives et quantitatives ont confirmé les prédictions théoriques issues de l'étude des fonctions de transfert pour chaque configuration. Pour la première configuration, les mesures ont mis en évidence le comportement de ce circuit comme un filtre passe-bande.

Les valeurs expérimentales sont cohérentes avec les valeurs théoriques. L'écart sur le facteur de qualité est probablement dû à la négligence des résistances internes des appareils et des fils de connexion.

La tension aux bornes du condensateur de la deuxième configuration présente une résonance en charge.

De plus, l'influence de la résistance a été démontré. Ainsi, pour $R = 5\Omega$, le facteur de qualité est élevé alors que pour $R = 50\Omega$, le facteur de qualité est faible et la fréquence de résonance f_r est légèrement inférieure à la fréquence f_0 .