



Chapitre

Fonction d'onde

1.1 Ce qu'il faut retenir

Notion	Résultat
Équation de Schrödinger (particule libre)	$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$ (Potentiel $V(x) = 0$).
Densité de probabilité	$\rho(x, t) = \psi(x, t) ^2 = \psi^*(x, t) \psi(x, t) \geq 0$.
Conservation de la charge / probabilité	$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, t) ^2 dx = 0 \implies \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, t) ^2 dx = \text{Cte} = 1$
Relation de dispersion	Pour la particule libre : $\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}$.
Vitesse de phase	$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m} = \frac{p}{2m} = \frac{v_{\text{classique}}}{2}$.
Paquet d'ondes	Superposition d'OP : $\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int C(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk$.

π Théorème 1.1 : Équation de Schrödinger stationnaire à une dimension

Pour un état stationnaire de forme $\Psi(x, t) = \psi(x) e^{-iEt/\hbar}$, la partie spatiale $\psi(x)$ vérifie l'équation de Schrödinger indépendante du temps :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + V(x) \psi(x) = E \psi(x) \quad (1.1)$$

Vecteurs d'onde

On définit les nombres d'onde selon la région et le niveau d'énergie :

- Région I ($x < 0$) : $k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$
- Région II ($x > 0, E > V_0$) : $k_2 = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}$

- Région II ($x > 0, E < V_0$) : $\kappa = \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$ (constante d'atténuation)

Définition 1.1 : Courant de probabilité

Le courant de probabilité $J(x)$ associé à une fonction d'onde unidimensionnelle $\psi(x)$ est donné par :

$$J(x) = \frac{\hbar}{2mi} \left(\psi^* \frac{d\psi}{dx} - \psi \frac{d\psi^*}{dx} \right) = \frac{\hbar}{m} \text{Im} \left(\psi^* \frac{d\psi}{dx} \right) \quad (1.2)$$

Pour une onde plane progressive $\psi(x) = Ae^{ikx}$, le courant vaut $J = \frac{\hbar k}{m} |A|^2$.

Coefficients d'amplitude et de probabilité

Pour une particule incidente depuis $x = -\infty$:

- Coefficients d'amplitude : $r = \frac{A_r}{A_i}$ (réflexion) et $t = \frac{A_t}{A_i}$ (transmission).
- Coefficients de probabilité :

$$R = \left| \frac{J_r}{J_i} \right| = |r|^2, \quad T = \left| \frac{J_t}{J_i} \right| = \frac{k_2}{k_1} |t|^2 \quad (\text{pour } E > V_0) \quad (1.3)$$

Conservation du courant de probabilité

Pour tout état stationnaire, la conservation du flux de probabilité impose :

$$R + T = 1 \quad (1.4)$$

Si $E < V_0$, l'onde transmise est une onde évanescence ($J_t = 0$), ce qui implique $R = 1$ et $T = 0$ (réflexion totale).

Proposition 1.1 : Longueur de pénétration

Pour $E < V_0$, la densité de probabilité de présence dans la région II décroît exponentiellement selon $|\psi_{II}(x)|^2 \propto e^{-2\kappa x}$. La longueur

de pénétration (ou profondeur de pénétration) est définie par :

$$\delta = \frac{1}{2\kappa} = \frac{\hbar}{2\sqrt{2m(V_0 - E)}} \quad (1.5)$$

1.2 Méthodes et Astuces de Résolution



Méthode générale de résolution des problèmes de potentiel à marches

1. Écrire l'équation de Schrödinger stationnaire séparément dans chaque zone à potentiel constant.
2. Exprimer la solution générale dans chaque zone comme combinaison linéaire d'ondes planes (e^{ikx} et e^{-ikx}) ou d'exponentielles ($e^{\kappa x}$ et $e^{-\kappa x}$).
3. Utiliser la condition de bornitude à l'infini pour éliminer les termes divergents (ex : $e^{\kappa x}$ pour $x \rightarrow +\infty$).
4. Appliquer l'hypothèse physique sur la provenance de la particule (ex : absence d'onde venant de $+\infty$).
5. Appliquer les conditions aux limites (raccordement) en $x = 0$.



Proposition 2.1 : Conditions de raccordement

En tout point où le potentiel $V(x)$ ne présente pas de singularité infinie (comme une distribution δ de Dirac), la fonction d'onde $\psi(x)$ et sa dérivée première $\psi'(x)$ doivent être continues :

$$\psi_I(0^-) = \psi_{II}(0^+), \quad \frac{d\psi_I}{dx}(0^-) = \frac{d\psi_{II}}{dx}(0^+) \quad (1.6)$$

Ces deux équations permettent de déterminer les rapports d'amplitude r et t .



Astuce : Formules rapides des coefficients r et t ($E > V_0$)

En appliquant la continuité de ψ et ψ' en $x = 0$, on obtient directement :

$$r = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}, \quad t = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \quad (1.7)$$

Pour $E < V_0$, il suffit de remplacer k_2 par $i\kappa$:

$$r = \frac{k_1 - i\kappa}{k_1 + i\kappa} \implies |r|^2 = 1 \implies R = 1 \quad (1.8)$$



Interférences dans la région I ($E < V_0$)

Dans la région I, la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie donne un système d'ondes stationnaires :

$$\psi_I(x) = A_i (e^{ik_1x} + e^{i\phi} e^{-ik_1x}) \quad (1.9)$$

où $r = e^{i\phi}$. La densité de probabilité s'écrit alors :

$$|\psi_I(x)|^2 = 4|A_i|^2 \cos^2 \left(k_1x - \frac{\phi}{2} \right) \quad (1.10)$$

- Période spatiale des interférences : $\lambda = \frac{\pi}{k_1} = \frac{\lambda_{\text{de Broglie}}}{2}$.
- Contraste des franges : $C = \frac{I_{\text{max}} - I_{\text{min}}}{I_{\text{max}} + I_{\text{min}}} = 1$ (car $|r| = 1$).